Práctica 4: Algoritmo de ramificación y acotación

Investigación Operativa
Ingeniería Informática UC3M

Curso 06/07

Descripción de los objetivos

En esta práctica desarrollaremos el algoritmo de ramificación y acotación (*Branch and bound* en inglés) para resolver un problema de Programación Lineal Entera. En cada paso, utilizaremos el Solver de Excel para calcular la solución del correspondiente problema relajado y realizaremos un pequeño informe sobre la evolución del algoritmo.

En el archivo `bb.xls` adjunto se encuentra la formulación en Excel del problema entero siguiente:

$$\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\
\text{sujeto a} \quad & x_2 - 5x_3 + x_4 + 2x_5 \geqslant -2 \\
& 5x_1 - x_2 + x_5 \geqslant 7 \\
& x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 \geqslant 4 \\
& x_i \geqslant 0 \text{ y entera, } i = 1, \ldots, 5.
\end{aligned}$$

En la parte superior se han formulado la función objetivo (fila 2), las restricciones usuales (filas 4 a 6) y las restricciones de no negatividad (filas 9 a 13).

Obsérvese que las restricciones de no negatividad están formuladas como $0 \leq x_i \leq 10^{13}$ (donde este último, un número enorme, representa el infinito). Esta notación está destinada a facilitar la introducción de restricciones en el algoritmo. Así, si queremos añadir la restricción $3 \leq x_2$, en lugar de cambiarla en el cuadro de diálogo del Solver, sencillamente sustituimos el 0 por un 3 en la casilla B10. De igual modo, si deseamos introducir $x_4 \leq 7$, cambiaremos el 10^{13} por un 7 en la casilla D12. Este método evita errores y confusiones cuando hay que cambiar muchas restricciones, como es el caso.

En la parte inferior tenemos un cuadro de doble entrada. Cada una de las filas de este cuadro (fila 17 y siguientes) contendrá el informe de un paso de la iteración, mientras que en cada columna datos que describirán un aspecto de dichos pasos.

Así, para cada fila tendremos los siguientes datos:

- **Índice:** Índice del nodo explorado.
- **Hijo de:** Índice del nodo de donde desciende.

- **Añadí:** (no estándar) Restricción nueva respecto al nodo de donde desciende.
- **Act.:** Número de nodos pendientes de resolver una vez resuelto el problema actual.
- **nivel:** Nivel del nodo en el árbol de búsqueda. La relajación lineal del problema inicial es el nodo raíz, que está a nivel 0, y cada vez que ramificamos desde un nodo, creamos dos nodos en el nivel superior.
- **Objetivo:** Valor de la función objetivo para el PL del nodo actual.
- **IInf.:** Número de variables no enteras en la solución óptima del nodo actual.
- **Mejor cota:** Mejor cota que tenemos para el problema entero (valor entero inmediatamente superior -inferior si es un problema de maximización- al mejor valor de la función objetivo encontrado hasta el momento).
- **Mejor conoc.:** Valor de la mejor solución entera encontrada hasta el momento.
- **Gap:** De alguna manera mide la distancia entre la cota y la mejor solución que tenemos hasta el momento, llamada incumbente. Más concretamente, aparece en esta columna la diferencia relativa
$$\frac{|\text{incumbente - cota }|}{|\text{cota}|}.$$
En ocasiones, si la diferencia es lo bastante pequeña, podemos parar el algoritmo y conformarnos con la incumbente, aunque no sea ésta la solución óptima del problema de Programación Entera.
- Cuando se poda una rama, se indica en la última columna el porqué.

Árbol de búsqueda y criterios de resolución

En el gráfico de la hoja `Arbol_de_B&B` tenéis el árbol de búsqueda que hemos usado para resolver este problema.

- Los nodos están numerados según el orden en que han sido explorados.
- Dentro de cada nodo hay:
  - ✓ Si el nodo dio lugar a una solución entera.
  - × Si el LP asociado a ese nodo es infactible.
  - x_i Si desde ese nodo se escogió la variable x_i para ramificar.
  - cota Si ese nodo se eliminó por acotación.
- A lo largo de la resolución se seguirán los siguientes criterios.
  - **Variable de ramificación:** La que toma un valor más cercano al entero. En caso de empate, se usó el orden lexicográfico.

- **Orden de exploración del árbol:** Se ha hecho una búsqueda en profundidad. Es decir, siempre se resolvió primero el nodo que se ha generado más recientemente. Entre dos nodos generados en el mismo momento, resolvimos primero la rama cuya cota se apartaba menos del valor anterior de la variable. En caso de empate, se tomó primero la rama inferior.

Ejemplo: las primeras iteraciones

Paso 0.

Comenzamos aplicando el Solver de Excel (tal como se desarrolló en las primeras prácticas) al problema de Programación Lineal Continua asociado al problema entero, que es el que está formulado en la parte superior de la hoja adjunta. De este modo, obtenemos el óptimo $(1'41667, 0'08333, 0'41666, 0, 0)$. Como la solución no es entera, el algoritmo no concluye.

En el informe, nos encontramos con el nodo inicial, que tiene índice 0. La casilla "Hijo de"queda vacía por ser la primera iteración, como también "Añadí". Por la ramificación aparecen dos nuevos nodos, con lo cual "Act."=2. Como también estamos en nivel inicial, tomamos el 0 como el valor para el nivel. En esta solución, el valor de la casilla objetivo es 7,58333, que es el valor de la función objetivo en la solución óptima encontrada, que posee tres variables no enteras, x_1, x_2 y x_3 y por tanto "Inf."=3. Como el valor objetivo es 7,58333, el valor mínimo entero que puede tomar nuestra función (la "mejor cota") es 8. No hay aún solución entera, con lo que "Mejor conoc."queda, de momento, como "infinito", y lo mismo ocurre para "Gap".

Paso 1.

De acuerdo con los criterios del párrafo anterior, añadimos la restricción $x_2 \leq 0$ (modificando el valor de D10), y ejecutamos el Solver. Obtenemos como solución (1'4, 0, 0'41841, 0'0909, 0), con valor objetivo 7'6. Ahora el índice es 1, "Añadí"la restricción $x_2 \leq 0$, y hay de nuevo tres variables no enteras. La mejor cota sigue siendo 8, no hay solución solución entera conocida aún y el "Gap.es por tanto infinito. Se produce nueva ramificación, y dado que aún tenemos un nodo por resolver del paso anterior, "Act.=3". Hemos bajado a nivel 1.

Paso 2.

Siguiendo la mencionada estrategia de búsqueda en profundidad, ahora añadimos $x_4 \leq 0$ al subproblema anterior y ejecutamos Solver. La solución obtenida es (1'38182,0,0'436,0,0'09091), con valor objetivo 7'618. Estamos en el índice y nivel 2, y ahora "Act.-4, pues se vuelve a ramificar y hemos dejado atrás dos nodos sin investigar. De nuevo la mejor cota sigue siendo 8, sin solución entera ni Gap y tenemos tres variables no enteras en la solución.

Paso 3.

Ahora x_5 es la que está más cerca de un entero, y como éste es 0, añadimos $x_5 \leq 0$. Resolvemos y obtenemos la solución (1'6,0,0'4,0,0), con valor objetivo 8'4. Ya nos encontramos en índice y nivel 3, y como tenemos ramificación de nuevo, “Act.-5. El resto es como el anterior paso, aunque sólo quedan dos variables no enteras en la solución.

Paso 4.

Se añade a continuación la restricción $x_1 \geq 2$, 2 está más cerca de 1’6 que 1. Resolvemos y obtenemos la solución (2,0,0’3333,0,0) con valor objetivo 10’3333 y una sola variable no entera. Hemos llegado ya al índice y nivel 4, y de nuevo hay ramificación, luego “Act.-6. El resto también queda como el anterior paso.

Paso 5.

Estamos ahora en índice y nivel 5. Añadimos la restricción $x_3 \leq 0$. Al resolver, se obtiene la solución (4,0,0,0,0) que es entera y que da el valor objetivo 20. Por tanto, esa rama se poda ahí, y “Act.-5. La mejor cota es la misma, pero por fin tenemos un valor para Mejor conoc., que es 20. El gap es por consiguiente de (20-8)/8 = 1,50.

Paso 6.

Ahora seguimos en nivel 5, puesto que hemos podado la rama anterior. Cambiamos la restricción $x_3 \leq 0$ por $x_3 \geq 1$ y resolvemos. El problema resulta infactible, con lo cual esta rama también se poda. Ahora “Act.-4, pues quedan cuatro nodos anteriores por resolver. La mejor cota, mejor conocida y gap no cambian, porque no hemos añadido ninguna solución entera nueva.

Paso 7.

Subimos al nivel 4, pues ya terminamos con el 5. Así, eliminamos las restricciones $x_1 \geq 2$ y $x_3 \geq 1$ para introducir $x_1 \leq 1$ antes de resolver. El problema vuelve a resultar infactible, con lo cual también podamos esta rama. Se queda, por tanto, “Act.-4, y tampoco cambian las mejores cotas ni el gap.

Paso 8.

Ahora subimos al nivel 3, eliminamos las restricciones $x_1 \leq 1$ y $x_5 \leq 0$ y resolvemos. Se obtiene una solución (1’2,0,0’46666,0,1), con valor 9’46666 para la función objetivo. Por tanto hay ramificación, “Act.-5 y hay dos variables no enteras. De nuevo no cambian las cotas.

Resto del algoritmo.

El proceso continúa de este modo hasta que se han podado todas las ramas. El único caso que aparece más tarde y no lo ha hecho hasta ahora es el de “corte por cota”, que puede verse en el árbol adjunto, por ejemplo, en el índice 12. En ese paso, se obtiene una solución que no tiene todos los valores enteros y cuyo valor para la función objetivo es 13’333. Esto significa que la función objetivo va a valer siempre por encima de 13’333 en esa rama. Como ese número es superior al 12 que ya nos dio la solución entera del paso 5, ninguna solución entera obtenida en esa rama va a ser óptima, y por tanto podamos la rama en ese punto. Obsérvese también que en el paso 16 (segundo caso del nivel 1) la mejor cota la podemos subir de 8 a 10. ¿Por qué?

Si el proceso se sigue correctamente, se llegará a la solución óptima (1,0,1,0,2), con un valor 12 para la función objetivo.

Como ya hemos visto, el solver de Excel permite trabajar con modelos de programación entera; *i.e.*, modelos donde tanto la función objetivo como las restricciones son lineales, pero las variables (o parte de ellas) son enteras. En este caso, si resolvemos el problema anterior con el Solver encontramos el óptimo alternativo $(2, 2, 0, 0, 0)$.

Cuestionario

Resolved el problema entero

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & 3x_1 - x_2 + 6x_3 - 2x_4 \\ \text{sujeto a} \quad & 8x_1 - 5x_4 \leqslant 5 \\ & x_1 + -x_3 + x_4 \leqslant 1 \\ & 2x_1 + 5x_3 \leqslant 13 \\ & -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \leqslant 3 \\ & x_i \geqslant 0 \text{ y entera, } i = 1, \ldots, 3 \\ & x_4 \geqslant 0. \end{aligned}$$

con el método de branch and bound, utilizando el solver de excel para resolver los subproblemas lineales.

Utilizad los mismos criterios que se han usado en el ejemplo anterior. Observad que es un problema de Programación Lineal Mixta, ya que no se exige que el valor de la variable x_4 sea entero. En particular, el valor óptimo de la función objetivo podrá no ser tampoco entero.

Para establecer las cotas podéis añadir/quitar restricciones en cada paso, o utilizar un vector de cotas inferiores y uno de cotas superiores como en el ejemplo anterior, y actualizarlas en cada paso.

Representad el árbol de búsqueda indicando el orden en que han sido explorados los nodos.