

Práctica 2: Análisis de sensibilidad e Interpretación Gráfica

a) Ejercicios Resueltos

Modelización y resolución del Ejercicio 5: (Del Conjunto de Problemas 4.5B del libro “Investigación de Operaciones”, H.A. Taha, página 150, 6ª edición)

HiDec produce dos modelos de artículos electrónicos, donde se usan resistores, capacitores y chips. La tabla siguiente es un resumen de los datos en este caso:

Recurso	Requerimientos del recurso por unidad		Disponibilidad máxima (unidades)
	Modelo 1 (unidades)	Modelo 2 (unidades)	
Resistor	2	3	1200
Capacitor	2	1	1000
Chips	0	4	800
Utilidad (\$)	3	4	

La empresa pretende decidir qué cantidad de cada modelo debe producir para maximizar el beneficio.

Variables:

Comenzamos por definir las dos variables de decisión del problema como:

- x_1 la cantidad de unidades a producir del modelo 1
- x_2 la cantidad de unidades a producir del modelo 2.

Función objetivo:

La función objetivo consiste en obtener el mayor beneficio posible:

$$\max z = 3x_1 + 4x_2$$

que es el resultado de multiplicar el vector de utilidad por el vector de las variables (en Excel seleccionamos la función SUMAPRODUCTO, dentro de la categoría “Matemáticas y trigonométricas”, para sumar el producto de los elementos uno a uno de estas dos matrices, cuidando que ambas matrices tengan el mismo orden).

Restricciones:

Las restricciones estarán dadas por el producto de la matriz de los coeficientes y el vector de las variables de decisión (utilizando la función de Excel SUMAPRODUCTO), de la siguiente forma:

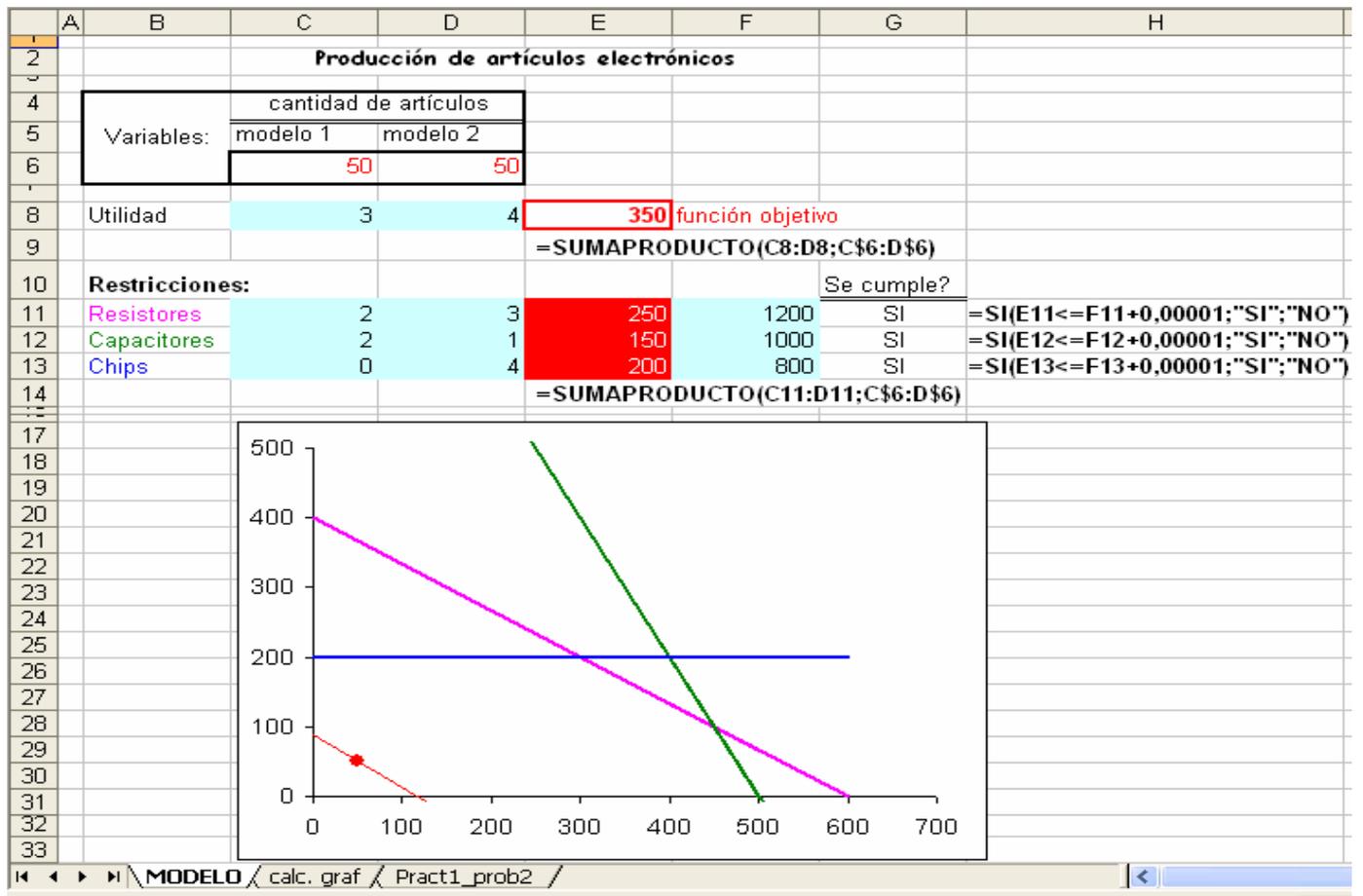
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 1200 && \text{Restricción relativa a los Resistores} \\ 2x_1 + 1x_2 &\leq 1000 && \text{Restricción relativa a los Capacitores} \\ 0x_1 + 4x_2 &\leq 800 && \text{Restricción relativa a los Chips} \\ x_i &\geq 0 && \text{con } i=1,2 \text{ Restricciones de no negatividad} \end{aligned}$$

Modelo en Forma Standard: agregando variables de holgura s_i positivas en cada una de las restricciones ya que éstas son de menor o igual, lo cual nos ayudará a contestar algunas de las cuestiones que se plantean a continuación.

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 4x_2 \\ \text{s.a.} \quad 2x_1 + 3x_2 + s_1 &= 1200 \\ 2x_1 + 1x_2 + s_2 &= 1000 \\ 0x_1 + 4x_2 + s_3 &= 800 \\ x_i &\geq 0 && \text{con } i=1,2 \\ s_i &\geq 0 && \text{con } i=1,2,3 \end{aligned}$$

La primera hoja del documento Excel practica2.xls contiene los datos necesarios de este ejemplo, así como un gráfico de la región factible del problema, se puede copiar de la página:

http://www.est.uc3m.es/esp/nueva_docencia/comp_col_leg/ing_info/io/practicas_leg/practica2.xls



En la columna siguiente a los términos independientes de las restricciones, con el subtítulo “Se cumple?” hemos utilizado la función lógica SI condicional, que devuelve un valor si la condición especificada es VERDADERA (en este caso SI, cuando se cumple que el valor del término izquierdo de la restricción es menor o igual que el derecho) y otro valor si dicho argumento es FALSO (en este caso NO, cuando no se cumple la restricción), para obtener información sobre el conjunto de Soluciones Factibles.

En el gráfico aparecen un punto rojo que representa la solución actual ($x_1=x_2=50$; función objetivo=350) y el segmento de recta rojo que contiene todos los puntos que dan igual valor para la función objetivo, esta solución es factible (aparece SI al final de cada una de las tres restricciones, todas se cumplen incluso las de no negatividad), es no básica (no se cumplen las restricciones en igualdad, es decir que no hay restricciones saturadas o activas, gráficamente el punto no es un vértice o intersección de rectas de restricción) y tampoco es óptima porque hay otros puntos o soluciones factibles que mejora el valor de la función objetivo.

1. Complete la siguiente tabla sustituyendo en la hoja 1 el valor de las variables de decisión, obtener el valor de la función objetivo y analizar a qué conjunto de soluciones pertenecen los siguientes pares de datos ($x_1;x_2$):

Variables	(0;0)	(0;400)	(150;200)	(150;300)	(300;200)	(450;100)	(400;200)	(500;0)	(600;0)
Función Objetivo									
Factible									
Básica									

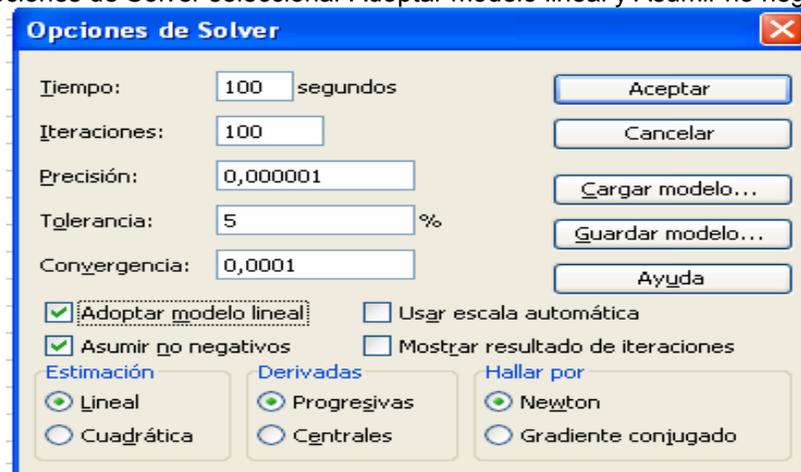
2. Restaurar los valores iniciales ($x_1=x_2=50$; función objetivo=350) en sus correspondientes celdas de la hoja de cálculo y usar el Solver de Excel para obtener la solución óptima del problema (Recordatorio: en el menú Herramientas debe aparecer Solver, de lo contrario ir al menú **Herramientas --> Complementos** y activarlo). Seleccionar Solver dentro del menú Herramientas, aparece la pantalla de Parámetros de Solver e introducir las celdas

Programación Lineal / Método del Simplex y Análisis post-óptimo

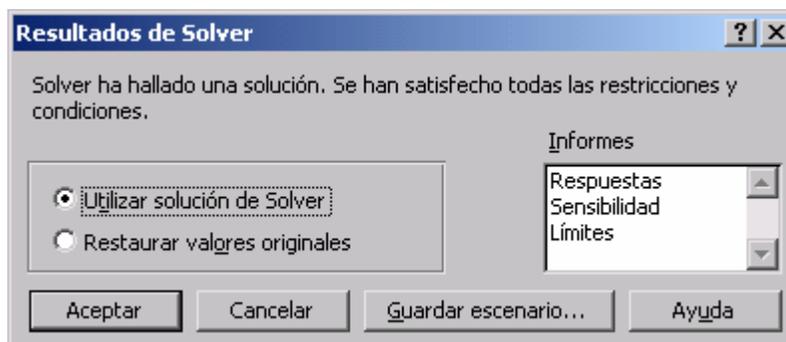
de la función objetivo, seleccionar máximo, las celdas de las variables de decisión (Cambiando las celdas) y agregar las restricciones, todo lo anterior haciendo siempre referencia a las celdas donde se encuentran de la hoja de cálculo.



Recordar en el menú Opciones de Solver seleccionar Adoptar modelo lineal y Asumir no negativos, oprimir Aceptar



Al volver al menú Parámetros del Solver seleccionar Resolver, si todo ha salido bien, como nuestro problema es de programación lineal, debe aparecer la siguiente pantalla:



Seleccionamos "Utilizar solución de Solver" para que la solución óptima aparezca en la propia hoja Excel (si se elige "Restaurar valores originales" la solución Solver de Excel óptima sólo aparece en los informes) y los tres tipos de informes, ubicando el cursor sobre cada uno de ellos y se oprime el botón izquierdo del ratón. Después de unos segundos aparecen tres nuevas hojas en el libro de Excel, una por cada informe. Estos tres informes aparecen en problemas de Programación Lineal Continua, para problemas lineales enteros o no lineales sólo se puede generar el informe de Respuestas.

4. Informe de respuestas

El informe Respuestas proporciona el valor inicial y final u óptimo de la celda objetivo y de las celdas de las variables de decisión (también llamadas celdas ajustables), un listado de cada restricción y su estado clasificado en Obligatorio para las restricciones activas y Opcional para las no activas, el término divergencia se utiliza para describir tanto las variables de holgura como las de beneficio, representa la diferencia entre los dos miembros de la restricción, se puede comprobar con la columna Valor de la celda, para las restricciones activas esta divergencia es 0.

A	B	C	D	E	F	G
1	Microsoft Excel 11.0 Informe de respuestas					
2	Hoja de cálculo: [practica206.xls]MODELO					
3	Informe creado: 27/10/2006 12:51:18					
4						
5						
6	Celda objetivo (Máximo)					
7	Celda	Nombre	Valor original	Valor final		
8	\$E\$8	Utilidad	350	1750		
9						
10						
11	Celdas cambiantes					
12	Celda	Nombre	Valor original	Valor final		
13	\$C\$6	modelo 1	50	450		
14	\$D\$6	modelo 2	50	100		
15						
16						
17	Restricciones					
18	Celda	Nombre	Valor de la celda	fórmula	Estado	Divergencia
19	\$E\$11	Resistores	=SUMAPRODUCTO(C8:D8;C\$6:D\$6)	1200	\$E\$11<=\$F\$11	Obligatorio
20	\$E\$12	Capacitores	=SUMAPRODUCTO(C8:D8;C\$6:D\$6)	1000	\$E\$12<=\$F\$12	Obligatorio
21	\$E\$13	Chips	=SUMAPRODUCTO(C8:D8;C\$6:D\$6)	400	\$E\$13<=\$F\$13	Opcional

De este informe podemos concluir que en nuestro problema las variables básicas en la solución son x_1 , x_2 y s_3 , siendo las no básicas s_1 y s_2 . Además que los multiplicadores (λ_i) de las restricciones no activas tienen que ser forzosamente 0, en esta solución $\lambda_3=0$ que corresponde a la única restricción no activa en la solución óptima.

5. Informe de límites

Este informe da los límites superior e inferior de cada celda ajustable (cada una de las celdas que contienen a la función objetivo y a las variables de decisión) manteniendo el resto de las celdas ajustables en su valor actual y cumpliendo las restricciones.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Microsoft Excel 11.0 Informe de límites								
2	Hoja de cálculo: [practica206.xls]Informe de límites 1								
3	Informe creado: 27/10/2006 12:51:18								
4									
5									
6	Celda objetivo								
7	Celda	Nombre	Igual						
8	\$E\$8	Utilidad	1750						
9									
10									
11	Celdas cambiantes			Límite Celda		Límite Celda			
12	Celda	Nombre	Igual	inferior	objetivo	superior	objetivo		
13	\$C\$6	modelo 1	450	0	400	450	1750		
14	\$D\$6	modelo 2	100	0	1350	99,99999987	1749,999999		

6. Informe de sensibilidad

En la primera parte, para cada variable del problema, tienes su valor óptimo, su coste reducido (σ_i) o multiplicador de las variables (en este caso ambos son 0, ya que el valor final u óptimo de ambas variables es mayor que 0, conviene producir ambos modelos), su coeficiente en la función objetivo, y también información sobre cuanto puede variar ese coeficiente (el aumento y la disminución permisibles), sin que la solución actual deje de ser la óptima (por supuesto, el valor de la solución sí cambiaría).

- Utiliza los valores de “Aumentos permisibles” que aparecen en la 1ª tabla para cambiar los coeficientes en la función objetivo original (sumando y restando a cada uno de los dos coeficientes sus aumentos permisibles, de uno en uno) y, teniendo en cuenta las variaciones en el gráfico, decide cual de las dos cabeceras “Aumento permisible” debería ser, en realidad “Disminución permisible”.
- Si la utilidad de los artículos del segundo modelo pasa a ser 1, hay un cambio de base.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 11.0 Informe de sensibilidad							
2	Hoja de cálculo: [practica206.xls]MODELO							
3	Informe creado: 27/10/2006 12:51:18							
4								
5								
6	Celdas cambiantes							
7								
8	Celda	Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido	Coficiente objetivo	Aumento permisible	Aumento permisible	
9	\$C\$6	modelo 1	450	0	3	5	0,333333333	
10	\$D\$6	modelo 2	100	0	4	0,5	2,5	
11								
12	Restricciones							
13								
14	Celda	Nombre	Valor Igual	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Aumento permisible	
15	\$E\$11	Resistores =SUMAPRODUCTO(C8:D8;C\$6:D\$6)	1200	1,25	1200	200	200	
16	\$E\$12	Capacitores =SUMAPRODUCTO(C8:D8;C\$6:D\$6)	1000	0,25	1000	200	200	
17	\$E\$13	Chips =SUMAPRODUCTO(C8:D8;C\$6:D\$6)	400	0	800	1E+30	400	

En la segunda parte, tienes información similar acerca de los términos independientes de las restricciones y de los multiplicadores (λ_i) de las restricciones, llamados "Precio Sombra" o variables duales del problema.

- Igual que antes, utiliza el gráfico para ver que pasa cuando a los términos independientes se les aplica incrementos/decrementos dentro del rango especificado en el informe.
- En este caso la solución óptima no se mantiene constante, sin embargo la base sí se mantiene constante.

b) Cuestionario

Toma el problema 2 de la Práctica 1 (En la segunda hoja del archivo practica2.xls tienes los datos del modelo y el enunciado en la página

http://www.est.uc3m.es/esp/nueva_docencia/comp_col_leg/ing_info/io/practicas_leg/practica1.pdf) y contestar las siguientes preguntas, para entregar al finalizar esta clase:

1. Plantea el modelo y su forma Standard.
2. ¿Cuál es la base óptima?
3. ¿Qué pasaría si el beneficio unitario del producto 2 baja de 5 a 1?
4. ¿Afectaría mucho un pequeño cambio en la capacidad de la planta 1 a la solución óptima?
5. Si la capacidad de la planta 3 disminuyera en 2 unidades, ¿la solución actual seguiría siendo factible? ¿la base actual seguiría siendo factible? ¿Cuál sería el valor de la solución asociada a esta base?

c) Ejercicios Propuestos

Contestar las preguntas del cuestionario de esta práctica utilizando los demás problemas planteados en el enunciado de la Práctica 1

d) Bibliografía

- Taha, H.A. (1998) "Investigación de Operaciones, una introducción", Prentice Hall, 6ª edición, capítulo 3
- Manual Aprende Excel como si estuviera en primero
<http://halweb.uc3m.es/omar/Taller/Manuales/aprendaexcel2000.pdf>