UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
Ingeniería Informática
Examen de Investigación Operativa
11 de septiembre de 2006

Problema 1. (2 puntos) Un taller ha recibido 6 pedidos, para los que tiene fechas de entrega contratadas. En la siguiente tabla figuran el tiempo requerido para realizar cada pedido d_j, la fecha de entrega contratada g_i, y la penalización (en € por día de retraso) p_i.

orden	1	2	3	4	5	6
g	2	4	8	12	13	17
d	5	4	3	5	2	7
p	5	4	2	1	7	1

Escribe un modelo de programación matemática para decidir en qué orden deberían realizarse los pedidos para que la penalización total por retrasos sea lo más pequeña posible.

Solución. *Consideramos variables binarias*

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{si después de la tarea } i \textit{ realizamos la tarea } j \\ 0 & \textit{en caso contrario} \end{cases}$$

Con $i = 0, \ldots, 6$*;* $j = 1, \ldots, 7$ *(la tarea 0 representa iniciar el trabajo y la tarea 7 representa finalizar).*

Además, usaremos variables continuas

$$t_i = \textit{tiempo de finalización de la tarea } i$$

y

$$e_i = \textit{retraso de la tarea } i$$

Un posible modelo es :

$$\begin{aligned}
\textit{Minimizar} \quad & 5e_1 + 4e_2 + 2e_3 + e_4 + 7e_5 + e_6 \\
\textit{suj. a} \quad & \sum_{i=0}^{6} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \ldots, 7 \\
& \sum_{j=1}^{7} x_{ij} = 1 \quad i = 0, \ldots, 6 \\
& e_i \geqslant t_i - d_i \quad i = 1, \ldots, 6 \\
& t_j \geqslant t_i - M + (M + d_j)x_{ij} \quad i = 0, \ldots, 6; j = 1, \ldots, 6 \\
& x_{ii} = 0 \quad i = 1, \ldots, 6 \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 0, \ldots, 6; j = 1, \ldots, 6 \\
& t_i, e_i \geqslant 0 \quad i = 1, \ldots, 6
\end{aligned}$$

Problema 2. (2 puntos) Considera el siguiente problema de Programación Lineal:

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & 0.4x_1 + 0.5x_2 \\ \text{sujeto a} & 0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7 \\ & 0.5x_1 + 0.5x_2 = 6 \\ & 0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6 \\ & x \geq 0. \end{array}$$

1. Escribe el problema anterior en forma estándar.
2. Formula (sin resolver) los dos problemas correspondientes al método de las dos fases para encontrar una solución básica factible al problema del apartado anterior.
3. La solución al problema de la Fase I proporciona la siguiente solución básica factible para el problema de la Fase II: $x = (6,\ 6,\ 0.3,\ 0)$. A partir de esta solución, aplica el método Simplex para obtener una solución óptima al problema original.

Solución. .

1. *El problema original en forma estándar es:*

$$\begin{array}{rl} \textit{minimizar} & 0.4x_1 + 0.5x_2 \\ \textit{sujeto a} & 0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 = 2.7 \\ & 0.5x_1 + 0.5x_2 = 6 \\ & 0.6x_1 + 0.4x_2 - x_4 = 6 \\ & x \geq 0. \end{array}$$

2. *Problema de la Fase I:*

$$\begin{array}{rl} \textit{minimizar} & z_1 + z_2 \\ \textit{sujeto a} & 0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 = 2.7 \\ & 0.5x_1 + 0.5x_2 + z_1 = 6 \\ & 0.6x_1 + 0.4x_2 - x_4 + z_2 = 6 \\ & x, z \geq 0. \end{array}$$

   Problema de la Fase II:

$$\begin{array}{rl} \textit{minimizar} & 0.4x_1 + 0.5x_2 \\ \textit{sujeto a} & 0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 = 2.7 \\ & 0.5x_1 + 0.5x_2 = 6 \\ & 0.6x_1 + 0.4x_2 - x_4 = 6 \\ & x \geq 0. \end{array}$$

3. *Partiendo de la solución básica factible* $x = (6,\ 6,\ 0.3,\ 0)$ *(con* $\sigma_N = -0.5$*) y tras una iteración se llega a la solución óptima* $x = (7.5,\ 4.5,\ 0,\ 0.3)$ *(con* $\sigma_N = 0.5$*).*

Problema 3. (2 puntos) Dado el siguiente problema de la mochila:

$$\begin{array}{rl} \text{max} & 10x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 6x_4 \\ \text{s.a} & 5x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 4x_4 \leq 15 \\ & x_i \in \{0,1\},\ i = 1, \ldots, 6 \end{array}$$

a) Obtén una solución aplicando una heurística tipo greedy.

b) ¿Cómo podrías emplear la información proporcionada por dicha solución al resolver el problema mediante un algoritmo de ramificación y acotación?

Solución. *a) Una heurstica de tipo greedy podra consistir en ir incluyendo los objetos en orden decreciente a su* "prioridad"*, donde la prioridad la podramos definir como el valor de cada unidad de volumen del producto. As,*

$$p_1 = \frac{10}{5},\ p_2 = \frac{15}{8},\ p_3 = \frac{10}{6},\ p_4 = \frac{6}{4}.$$

Lo que nos dara como solucin: incluir en el orden 1, 2, 3 y 4. Slo caben los productos 1 y 2, esto es, $\mathbf{x} = (1, 1, 0, 0)$*, con un valor de 25.*

b) La podramos emplear como una cota inferior, para podar todas aquellas ramas cuya cota superior sea inferior a 25.

Problema 4. (2 puntos) Una nueva empresa de mensajería se dispone a abrir sus servicios en España. La empresa quiere ofrecer un servicio de paquetería entre 9 ciudades españolas; Badajoz, Barcelona, Elche, Granada, Madrid, Sevilla, Tenerife, Valencia y Valladolid. La empresa se compromete a no dejar nunca los paquetes en manos de otras compañías, sino que siempre serán empleados de la propia compañía los que transporten las mercancías.

Cada empleado de la compañía se encarga del enlace de 2 ciudades concretas. Como la empresa está empezando, no tiene presupuesto para tener los 36 empleados que harían falta para tener directamente conectados todos los pares de ciudades. De momento, los paquetes entre un par de ciudades que no tenga asignado ningún trabajador, pasarán por tantas ciudades intermedias como haga falta.

El coste que le suponen los empleados a la empresa depende de la distancia entre el par de ciudades que conecta cada uno. En la tabla siguiente tenéis el coste diario por empleado asociado a cada par de ciudades.

Decide qué pares de ciudades deberían estar directamente conectadas para que la empresa pueda satisfacer todos los pedidos y el coste total de los salarios sea el más pequeño posible.

	Valladolid	Badajoz	Madrid	Barcelona	Valencia	Elche	Granada	Tenerife	Sevilla
Valladolid	0	57.5	25.4	76	66	70	71.5	450	77
Badajoz		0	46.3	113.5	87	92.8	61.7	403.3	31.2
Madrid			0	69.7	43	49	48.7	433.2	62.3
Barcelona				0	37.2	57.7	94.3	491.7	121
Valencia					0	22.2	60.3	453.5	82.7
Elche						0	40.3	437	68.8
Granada							0	400.8	32.5
Tenerife								0	375.2
Sevilla									0

Solución. *El conjunto de empleados (conexiones) óptimo vendrá dado por el árbol de expansión de coste mínimo en el grafo completo* $G = (N, A)$ *donde* N *es el conjunto de ciudades, y los pesos de los arcos son los costes diarios de la tabla del enunciado.*

Para encontrar la solución óptima podemos usar algoritmos como el de Kruskal o el de Prim.

La solución óptima es contratar transportistas para los pares:

- *Valencia - Elche*
- *Valladolid - Madrid*
- *Badajoz - Sevilla*
- *Granada - Sevilla*
- *Barcelona - Valencia*
- *Madrid - Valencia*
- *Granada - Elche*
- *Tenerife - Sevilla*

Esta contratación supondría un coste diario de 607€.

Problema 5. (2 puntos) Un centro de atención primaria tiene que administrar la vacuna de poliomelitis a los niños de un barrio. El centro está organizado de forma que los padres van llegando con los niños, forman una cola, y se atienden 40 por hora, con una distribución exponencial, por cualquiera de las enfermeras que están de servicio. Este servicio de vacunación se ofrece una vez a la semana, y en este día las llegadas se realizan con una tasa igual a 40 niños por hora. El director del centro sabe que la mayoría de los padres vienen durante sus horas de trabajo y por ello quiere limitar el tiempo total de administración de la vacuna a 15 minutos (incluyendo la espera) ¿Cuántas enfermeras tendrá que usar el gerente?

Puedes ayudarte de alguna de las fórmulas siguientes:

	p_0	p_n	L
$M/M/1$	$1-\rho$	$\rho^n p_0$	$\frac{\rho}{1-\rho}$
$M/M/s$	$\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \frac{1}{1-\rho}}$	$\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} p_0; \quad n \leqslant s$ $\frac{(\lambda/\mu)^n}{s! s^{n-s}} p_0; \quad n > s$	$\frac{(\lambda/\mu)^s p_0 \rho}{s!(1-\rho)^2} + \frac{\lambda}{\mu}$
$M/M/1/K$ $(\rho \neq 1)$	$\frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$	$\rho^n p_0$	$\frac{\rho(1-(K+1)\rho^K + K\rho^{K+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{K+1})}$
$M/M/1/K$ $(\rho = 1)$	$\frac{1}{K+1}$	$\frac{1}{K+1}$	$\frac{K}{2}$

Solución. *El proceso de vacunación se puede modelizar con una M/M/s, donde s es el número de enfermeras. Los parámetros del sistema son $\lambda = 40$ y $\mu = 40$; por tanto, el factor de utilización es $\rho = \frac{40}{40s} = \frac{1}{s}$.*

Para que el sistema tenga estado estacionario y éste sea independiente del estado inicial es necesario que $\rho < 1$; por tanto, $s \geqslant 2$.(No puede haber una única enfermera).

Cuanto mayor sea el número de enfermeras, menor será el tiempo medio en el sistema; por tanto, calcularemos los tiempos medios de administración de la vacuna para valores crecientes de s (desde $s = 2$) hasta que este quede debajo de $15'$.

Para $s = 2, W = \frac{1}{30}$ horas; es decir $w = 2$ minutos. Por tanto, 2 enfermeras serán suficientes para conseguir los propósitos del director del centro.