UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
Ingeniería Informática
Examen de Investigación Operativa
2 de septiembre de 2005

---

1. (2.5 puntos) Una empresa que fabrica vehículos quiere determinar un plan de producción semanal. Esta empresa dispone de 5 fábricas que producen distintos elementos del vehículo (motor, carrocería, acabado básico, medio y de lujo). Estos elementos posteriormente se ensamblan para producir tres versiones distintas de vehículos (básica, media y de lujo). A continuación se indican las capacidades de producción en cada fábrica (en horas por semana), los tiempos de fabricación en función de la fábrica y de la versión (en horas por semana y vehículo) y el beneficio neto que la empresa obtiene por cada versión de vehículo que vende (en euros).

		Tiempos por versión		
Fábrica	capacidad	Básica	Media	Lujo
Motor	120	3	2	1
Carrocería	80	1	2	3
Acabado básico	96	2		
Acabado medio	102		3	
Acabado lujo	40			2
Beneficio		840	1120	1200

a) (1 puntos) Escribe un modelo que permita a la empresa establecer un plan de producción semanal óptimo.

b) (0.5 puntos) Escribe el modelo anterior en forma estándar y encuentra un plan de producción inicial (solución básica factible).

c) (0.5 puntos) A partir de la solución anterior, realiza una iteración del método Simplex para encontrar un plan de producción mejor.

d) (0.5 puntos) Debido a un imprevisto, dentro de cuatro semanas la fábrica de motores tiene que disminuir en 10 horas su capacidad semanal. Sabiendo que el vector de multiplicadores en la solución óptima (para el modelo en forma estándar) es $\lambda = (-140, -420, 0, 0, 0)$, razona en cuánto disminuirá el beneficio neto de la empresa debido a este imprevisto.

Solución.

a) Las variables de decisión son x_1: número de vehículos en versión básica fabricados, x_2: número de vehículos en versión media fabricados, y x_3: número de vehículos en versión lujo fabricados. El modelo es

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & 840x_1 + 1120x_2 + 1200x_3 \\ \text{sujeto a} & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 120 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 80 \\ & 2x_1 \leq 96 \\ & 3x_2 \leq 102 \\ & 2x_3 \leq 40 \\ & x \geq 0. \end{array}$$

b) El modelo anterior en forma estándar es:

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & -840x_1 - 1120x_2 - 1200x_3 \\
\text{sujeto a} \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 120 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 80 \\
& 2x_1 + x_6 = 96 \\
& 3x_2 + x_7 = 102 \\
& 2x_3 + x_8 = 40 \\
& x \geq 0.
\end{aligned}
$$

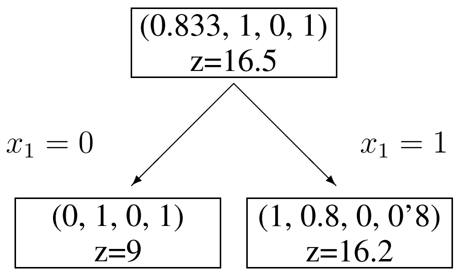
Un vértice inicial para este modelo será (tomando como variables básicas las de holgura): $x = (0, 0, 0, 120, 80, 96, 102, 40)$, es decir, no fabricar ningún vehículo (beneficio nulo).

c) El vértice inicial no es óptimo ya que $\sigma_N = (-840, -1120, -1200)$. Iterando el Simplex una vez se obtiene el punto $x = (0, 0, 20, 100, 20, 96, 102, 0)$ con un beneficio de 24000 euros (mejor que el anterior aunque no es el plan óptimo de producción).

d) Dado que los multiplicadores representan el coste marginal, el benefició disminuirá en $10 \times 140 = 1400$ euros.

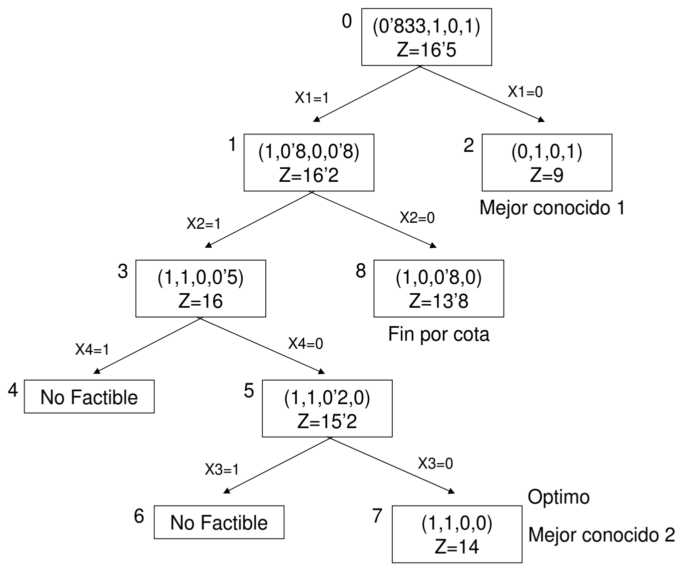
2. (2 puntos) Continua el procedimiento de ramificación y acotación (branch & bound) empezado para resolver el siguiente problema explicando qué vas haciendo. (No es necesario usar el método Simplex, basta con usar el método gráfico)

$$
\begin{aligned}
\text{Max } & 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\
\text{s.a. } & 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10 \\
& x_3 + x_4 \leq 1 \\
& -x_1 + x_3 \leq 0 \\
& -x_2 + x_4 \leq 0 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ binarias}
\end{aligned}
$$



Solución. Los problemas lineales de los hijos de la rama $x_1 = 1$ se pueden resolver gráficamente, ya sólo quedan 2 variables (las otras 2 se han fijado, a 0 o a 1). Para el resto ya sólo queda 1.

Un posible árbol solución es:



3. (1 punto) Discute razonadamente las siguientes afirmaciones y contesta razonadamente a las cuestiones (puedes ayudarte con ejemplos):

   a) (0.5 puntos) Si en un problema entero, el valor óptimo de la función objetivo es el mismo para el problema relajado y el entero, entonces toda solución óptima para la relajación lineal es factible para el problema entero.

   b) (0.5 puntos) Si se plantea un problema de programación lineal entera para tratar de mejorar la eficiencia (medida en términos de la emisión de residuos contaminantes) de un proceso productivo que ya está puesto en marcha, ¿cómo emplearías la información que proporciona el actual plan de producción en la resolución del problema por el método de ramificación y acotación?

Solución:

   a) Si el problema relajado tiene solución única, entonces sí.

   Si tiene múltiples soluciones, es falsa. Todas las soluciones en el segmento.

   Pueden ayudarse de un dibujo.

   b) Mejorar la eficiencia medida en términos de la emisión de residuos contaminantes: se querrá minimizar.

   El proceso productivo ya está puesto en marcha, entonces se cuenta con una solución factible que se puede emplear como mejor solución encontrada hasta el momento. Se trataría de una cota superior para la función objetivo (seguro que no vamos a contaminar más de lo que ya venimos contaminando).

4. (2 puntos) Cierto organismo público ofrece una serie de becas, cada una con distintos requisitos. Se han presentado exactamente tantos candidatos como becas se han ofertado, pero cada candidato tiene unas cualidades distintas, de forma que cada candidato sólo es elegible para un subconjunto de las becas. El organismo quiere determinar cuál es el mayor número de becas que puede adjudicar de manera que todos los beneficiarios estén cualificados para la beca que reciben. Explica cómo representarías este problema como uno de emparejamiento de cardinal máximo en un grafo, y qué propiedades debe tener el grafo para que se puedan adjudicar todas las becas.

Solución. Construimos un grafo bipartido, con un nodo para cada beca y uno para cada candidato. $G = (N, A)$ con $N = C \cup B$ (C son los candidatos y B las becas). Los arcos del grafo serán aquellos que unen a un candidato con una beca cuyos requisitos cumple; es decir, habrá solo arcos (c, b) con $c \in C$ y $b \in B$ cuando el candidato c sea elegible para la beca b, y seleccionar el arco (c, b) será equivalente a adjudicarle la beca b al candidato c.

Así, se puede determinar el número máximo de becas adjudicables resolviendo el problema de emparejamiento de cardinal máximo en G. Cuando el grafo tenga un emparejamiento perfecto existirá una forma de adjudicar todas las becas a candidatos elegibles.

5. (2.5 puntos) En la secretaría de una universidad debe atenderse el proceso de matrícula de los estudiantes una vez empezadas las clases. La secretaría se está organizando de manera que los estudiantes que van llegando forman una cola y se atienden a razón de 12 por hora, con una distribución exponencial, y por cualquiera de los becarios que están de servicio. Este servicio de matriculación se realiza en una sola semana, y durante esa semana las llegadas se realizan con una tasa igual a 36 estudiantes por hora. La gerente de la secretaría sabe que los estudiantes vienen durante horas de clase y por ello quiere limitar el tiemo total de matrícula a aproximadamente 15 minutos (incluyendo la espera). Por tanto, ¿cuántos becarios deberán tomarse para este servicio?

   Puedes ayudarte de alguna de las fórmulas siguientes:

	p_0	p_n	L
$M/M/1$	$1-\rho$	$\rho^n p_0$	$\frac{\rho}{1-\rho}$
$M/M/s$	$\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{s-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}+\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\frac{1}{1-\rho}}$	$\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}p_0; \quad n \leqslant s$ $\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!s^{n-s}}p_0; \quad n > s$	$\frac{(\lambda/\mu)^s p_0 \rho}{s!(1-\rho)^2} + \frac{\lambda}{\mu}$
$M/M/1/K$ $(\rho \neq 1)$	$\frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$	$\rho^n p_0$	$\frac{\rho(1-(K+1)\rho^K+K\rho^{K+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{K+1})}$
$M/M/1/K$ $(\rho = 1)$	$\frac{1}{K+1}$	$\frac{1}{K+1}$	$\frac{K}{2}$

Solución. La cola que se forma en secretaría se puede modelar como una M/M/s, donde s es el número de becarios, que queremos determinar.

Tenemos $\lambda = 36$ estudiantes por hora, y $\mu = 12$ estudiantes por hora, de forma que $\rho = 3/s$. Para que la secretaría no se desborde, es necesario que el sistema tenga estado estacionario, es decir, $\rho < 1$ de forma que, $s > 3$ y, por tanto, debe haber, al menos 4 becarios.

Como nos piden que el tiempo total en el sistema sea, en media, aproximadamente 15 minutos, calcularemos $W(s)$ para valores ascendentes de s, a partir de 4, hasta alcanzar 0,25 (ya que nuestra unidad temporal es la hora).

Para $s = 4$ tenemos $\rho = 3/4$, y $\lambda/\mu = 3$. Así, $p_0^{-1} = 1 + 3 + \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{6} + 13.5 = 26.5$, $p_0 = 0.037$, y

$$W = \frac{(\lambda/\mu)^s p_0}{s\mu s!(1-\rho)^2} + \frac{1}{\mu} < 0.25$$

Por tanto, con 4 becarios ya es suficiente para que los estudiantes pasen alrededor de los 15 minutos para matricularse.