UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
Ingeniería Informática
**Examen de Investigación Operativa**
11 de septiembre de 2004

---

1. (1.5 puntos) Para el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 \\ \text{sujeto a} & 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ & -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5 \\ & x \geq 0. \end{array}$$

   *a*) (0.5 puntos) Encuentra un vértice inicial con variables básicas $x_2$ y $x_4$.
   *b*) (0.5 puntos) ¿Es el vértice del apartado anterior una solución óptima? Razona la respuesta.
   *c*) (0.5 puntos) Si el lado derecho de la primera restricción pasa de ser 2 a ser 2.5, razona en cuánto cambia el valor óptimo de la función objetivo.

**Solución.**

   *a*) El vértice inicial es $x = (0, 4, 0, 1)$.
   *b*) Sí. Los multiplicadores son positivos. $z = 7$.
   *c*) La función objetivo pasa a ser $z = 7.5$, ya que $\lambda = (1, 1)$ y la base sigue siendo factible con ese nuevo término independiente.

2. (1.5 puntos) Para el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \text{ libre}. \end{array}$$

   *a*) (0.5 puntos) Escríbelo en forma estándar.
   *b*) (1 punto) Usa el método Símplex para obtener la solución óptima de dicho problema empezando en el punto $x_0 = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

**Solución.**

   *a*)

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & x_1 + x_2^+ - x_2^- \\ \text{sujeto a} & x_1 - x_2^+ + x_2^- - x_3 = 1 \\ & x_1 + 3x_2^+ - 3x_2^- + x_4 = 3 \\ & x \geq 0. \end{array}$$

*b*) El problema es no acotado.

3. (1.5 puntos) Un ingeniero informático autónomo quiere optar a realizar un proyecto informático de entre 5 que salen a concurso, pero solo tiene presupuesto para pagar las tasas de solicitud en 3 de ellos. Para tomar una decisión, tiene en cuenta el beneficio esperado que puede obtener a los tres años en cada uno de los proyectos junto con una estimación de las probabilidades de que no le concedan los proyectos. Estos datos se muestran a continuación:

| Proyecto | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Beneficio (miles de euros) | 90 | 150 | 80 | 100 | 120 |
| Probabilidad de rechazo | 0.4 | 0.7 | 0.4 | 0.5 | 0.6 |

*a*) (1 punto) Si el objetivo del informático es obtener un beneficio máximo y asegurarse que la suma de las probabilidades de rechazo sea como mucho de 1.5, plantea el problema de decisión como un programa matemático.

*b*) (0.5 puntos) Indica brevemente qué técnicas usarías para resolver dicho problema.

---

**Solución.** La decisión se puede tomar resolviendo el siguiente problema de Programación Entera:

*a*)

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 \\ \text{sujeto a} & p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4 + p_5x_5 \leq 1.5 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3 \\ & x \geq 0 \text{ y enteras.} \end{array}$$

*b*) Técnicas de PE: Branch and Bound, Cortes de Gomory, Branch and Cut, etc.

4. (2.5 puntos) Se quiere estudiar el tiempo necesario para completar un proceso de depuración de errores de un cierto código. Para ello se hacen las hipótesis siguientes:

- Se supone que los errores pueden ser de dos tipos: graves y menos graves.
- Se estima que el número de errores presente en el código es igual a 10.
- Se supone que la mitad de estos errores son graves y la mitad son menos graves.
- El tiempo necesario para que un programador detecte un error se supone exponencial con media $30/N$, donde $N$ es el número de errores restante en el código ($N = 10$ inicialmente).
- En cuanto se detecta un error, este se corrige inmediatamente sin añadir nuevos errores y se continua la depuración del código.
- La probabilidad de que el error detectado sea grave se supone igual a $2N_1/(2N_1 + N_2)$, donde $N_1$ denota el número de errores graves restantes y $N_2$ el correspondiente número de errores menos graves.

Se desea estimar el tiempo medio necesario para detectar al menos 3 errores no graves y todos los errores graves menos uno.

Describe el procedimiento de simulación estocástica a aplicar para llevar a cabo este cálculo y lleva a cabo tres pasos correspondientes al cálculo de uno de los valores del tiempo de depuración. Te puedes ayudar de los siguientes valores obtenidos a partir de una variable $\mathcal{U}(0, 1)$:

| $U_1$ | $U_2$ |
|---|---|
| $0.8214$ | $0.4447$ |
| $0.6154$ | $0.7919$ |
| $0.9218$ | $0.7382$ |
| $0.1763$ | $0.4057$ |

---

**Solución.** El procedimiento de simulación consiste en repetir un número elevado de veces el procedimiento para calcular el tiempo de depuración dados unos valores concretos de las variables aleatorias que intervienen en el proceso, generados de acuerdo con sus distribuciones de probabilidad y a partir de valores uniformes en $[0, 1]$.

El proceso consistiría en repetir los pasos siguientes:

- Inicializar $N_1 = 5$ y $N_2 = 5$. También $T = 0$.
- Generar un valor para el tiempo hasta detectar el error siguiente. Si $U_1$ denota un valor uniforme en $[0, 1]$, obtener
$$\Delta T = -(30/(N_1 + N_2)) \log U.$$
- Generar información sobre el tipo de error detectado. Dado $U_2$ uniforme en $[0, 1]$, si $U_2 \leq 2N_1/(2N_1 + N_2)$ el error es grave y si no es menos grave.
- Actualizar valores, esto es, hacer $T = T + \Delta T$. Si el error era grave, hacer $N_1 = N_1 - 1$ y si no hacer $N_2 = N_2 - 1$.
- Si $N_1 \leq 1$ y $N_2 \leq 2$ terminar con el valor de $T$ obtenido, y repetir todo el procedimiento para completar la muestra de tiempos de depuración. Si no, ir a 2.

A continuación indicamos los valores obtenidos para tres iteraciones de este proceso, recogidos en una tabla.

| $T$ | $N_1$ | $N_2$ | $U_1$ | $\Delta T$ | $U_2$ | $2N_1/(2N_1 + N_2)$ | G/MG |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 5 | 5 | 0.8214 | 0.5902 | 0.4447 | 0.6667 | G |
| 0.5902 | 4 | 5 | 0.6154 | 1.6181 | 0.7919 | 0.6154 | MG |
| 2.2083 | 4 | 4 | 0.9218 | 0.3053 | 0.7382 | 0.6667 | MG |
| 2.5136 | 4 | 3 | 0.1763 | 7.4390 | 0.4057 | 0.7273 | G |

5. (3 puntos) El pago del peaje en la salida de una autopista se realiza utilizando una única cabina de pago de las dos cabinas disponibles. La tasa de llegadas a la cabina es de 90 por hora, y el tiempo medio que necesita un conductor para completar el pago es de 30 segundos. Se supone que los tiempos entre llegadas y de pago siguen distribuciones exponenciales.

   *a*) (1.5 puntos) Se quiere saber cual es el número medio de automóviles en el sistema, y el tiempo medio de espera de los mismos.

   *b*) (1.5 puntos) Se quiere estudiar si se abre la segunda cabina. Suponiendo que no cambian las tasas de llegada al sistema ni la tasa de servicio para cada cabina, ¿cuáles son los nuevos tiempos de espera medios?

Puedes ayudarte de alguna de las fórmulas siguientes:

| | $p_0$ | $p_n$ | $L$ |
|---|---|---|---|
| $M/M/1$ | $1-\rho$ | $\rho^n p_0$ | $\frac{\rho}{1-\rho}$ |
| $M/M/s$ | $\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\frac{1}{1-\rho}}$ | $\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} p_0; \quad n \leqslant s$<br>$\frac{(\lambda/\mu)^s}{s! s^{n-s}} p_0; \quad n > s$ | $\frac{(\lambda/\mu)^s p_0 \rho}{s!(1-\rho)^2} + \frac{\lambda}{\mu}$ |
| $M/M/1/K$ $(\rho \neq 1)$ | $\frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$ | $\rho^n p_0$ | $\frac{\rho(1-(K+1)\rho^K + K\rho^{K+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{K+1})}$ |
| $M/M/1/K$ $(\rho = 1)$ | $\frac{1}{K+1}$ | $\frac{1}{K+1}$ | $\frac{K}{2}$ |

---

**Solución.** Comenzamos calculando los números medios de clientes en el sistema para el caso de tener una única cabina funcionando. Empezamos por la definición de las tasas de llegadas y servicios.

$$\lambda = 90 \text{ h}^{-1}, \qquad \mu = \frac{1}{E[T_s]} = 1/30 \text{ s}^{-1} = 3600/30 \text{ h}^{-1} = 120 \text{ h}^{-1}.$$

La ocupación del sistema será por tanto

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 90/120 = 0.75$$

En el caso de una cola M/M/1 tenemos:

$$L = E[N] = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.75}{0.25} = 3.$$

Si ahora aplicamos la ley de Little, tendremos que el tiempo medio de paso por el sistema, $W = E[S]$, vale

$$W = \frac{1}{\lambda} L = \frac{3}{90} \text{ h} = 2 \text{ min}$$

Como el tiempo medio de servicio es de medio minuto,

$$W_q = W - E[T_s] = 2 - 0.5 = 1.5 \text{ min}$$

Para el caso con dos servidores (M/M/2) tenemos que $\rho = \lambda/(2\mu) = 0.375$ y para el número de clientes en el sistema:

$$L = \frac{(\lambda/\mu)^2 p_0 \rho}{2!(1-\rho)^2} + \frac{\lambda}{\mu} \tag{1}$$

La probabilidad de que el sistema est vaco ($p_0$) viene dada por la expresión:

$$\frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2}\frac{1}{1-\rho}} = 0.4545$$

Sustituyendo en 1, obtenemos:

$$L = 0.8727$$

Es decir, si se abre la segunda cabina el sistema estará mucho más vacío que actualmente.

Nuevamente, podemos calcular el tiempo medio en el sistema utilizando la fórmula de Little:

$$W = \frac{1}{\lambda} L = 0.097 \text{ horas} = 0.58 \text{ minutos}.$$

Y el tiempo medio de espera antes de ser atendido:

$$Wq = W - E[T_s] = 0.08 \text{minutos} = 4.9 \text{ segundos}.$$

Es decir, abrir la segunda cabina implicaria reducir el tiempo de espera de los vehículos de un minuto y medio a menos de 5 segundos.