UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
Ingeniería Informática
Examen de Investigación Operativa
8 de Septiembre de 2003

---

1. (2.5 puntos) Dado el problema lineal

$$\begin{array}{rc} \text{máx} & x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 \le 2 \\ & x \ge 0, \end{array}$$

se pide que:

a) (0.5 puntos) Verifiques que el punto $\begin{pmatrix} 4/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}^T$ es un vértice factible del problema anterior.

b) (1 punto) Apliques una iteración del método Simplex a partir del punto anterior.

c) (1 punto) Comentes si existe más de una solución para el problema anterior, e indiques el valor de alguna solución alternativa.

Solución. Por comodidad para responder a los siguientes puntos, comenzamos por reescribir el problema en forma estándar. Obtenemos

$$\begin{array}{rc} \text{máx} & x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 2 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 + s_2 = 2 \\ & x, s \ge 0. \end{array}$$

Sustituyendo en las restricciones del problema tenemos que en el punto indicado $s_1 = 0$ y $s_2 = 0$. Las variables son no negativas, el número de variables iguales a cero es tres, y como $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ es no singular, el punto es un vértice factible.

Para aplicar el método Simplex empezamos por calcular los multiplicadores. Obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma_n &= c_n - N^T B^{-T} c_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El vértice no es solución y el multiplicador más positivo es el primero, por lo que definimos la dirección de movimiento como

$$p_n = e_1,\ Bp_b = -Np_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} p_b = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow p_b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La longitud de paso vale $\alpha = 2/3$ y el nuevo vértice es $(4/3, 2/3, 0, 0, 0)$. Con esto completamos la primera iteración.

Para contestar a la última pregunta calculamos en primer lugar los valores de los multiplicadores en el último vértice.

$$\begin{aligned} \sigma_n &= c_n - N^T B^{-T} c_b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como todos los multiplicadores son no positivos, este vértice es solución. Pero como uno de los multiplicadores es igual a cero, la solución no es única, sino que existe una arista de soluciones definida por el vértice anterior y la dirección

$$p_n = e_3,\ Bp_b = -Np_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} p_b = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow p_b = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

El otro vértice solución es que que se obtiene tomando un paso $\alpha = (4/3)/(1/3) = 4$, esto es, $(0, 2, 0, 0, 4)$. Todas las combinaciones convexas de los dos vértices son también soluciones.

2. (2.5 puntos) Para el problema entero siguiente,

$$\begin{array}{rc} \text{mín} & x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ & -2x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1 \\ & x \geq 0 \text{ enteras,} \end{array}$$

se pide que:

a) (0.5 puntos) Encuentres la solución del problema relajado correspondiente partiendo del vértice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 7/3 & 1/3 \end{pmatrix}^T$

b) (0.75 puntos) Indiques la forma de los subproblemas que generarías aplicando el método de “branch and bound” al problema anterior en la solución calculada en el apartado anterior.

c) (0.75 puntos) Indiques la forma de un plano de corte que generarías en dicha solución.

d) (0.5 puntos) ¿Es el punto $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}^T$ un vértice del problema anterior? ¿Qué puedes decir de la solución de dicho problema entero? ¿Existe más de una?

Solución. Para encontrar la solución del problema relajado aplicamos el método Simplex desde el vértice indicado. Obsérvese que dicho problema está ya en forma estándar.

Los multiplicadores valen

$$\begin{aligned} \sigma_n &= c_n - N^T B^{-T} c_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como el signo de los multiplicadores es correcto, tenemos que el punto indicado inicialmente es el vértice solución del problema entero.

Para aplicar el método de "branch and bound" seleccionamos una de las variables que toman valores no enteros e introducimos restricciones sobre la misma. En este caso podemos seleccionar bien la variable x_3 o bien la variable x_4. Si introducimos las restricciones sobre x_3, por ejemplo, estas serán $x_3 \leq 2$ y $x_3 \geq 3$, y obtenemos los subproblemas

$$\begin{array}{rc} \text{mín} & x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ & -2x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1 \\ & x_3 \leq 2 \\ & x \geq 0, \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rc} \text{mín} & x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ & -2x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1 \\ & x_3 \geq 3 \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Para generar un plano de corte en una solución no entera de un problema relajado, empezamos por determinar si la función objetivo toma un valor no entero. En este caso dicha función objetivo vale 4 en la solución, y por ser entera escogemos la primera de las variables que toman valores no enteros. En nuestro caso es x_3.

Aplicamos a continuación la expresión del corte,

$$\sum_{j \in N} f_{\bar{n}_{ij}} x_j \geq f_{\bar{b}_i},$$

donde $barn_{ij} = (B^{-1}N)_{ij}$ y $\bar{b}_i = (B^{-1}b)_i = (x_b)_i = 7/3$. En nuestro caso,

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & -2 \\ 1/3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, el corte correspondiente es

$$1/3x_1 + 0x_2 \geq 1/3,$$

o bien $x_1 \geq 1$.

3. (2 puntos) La siguiente matriz indica los costes de los billetes de avión para los vuelos directos entre distintas ciudades europeas, en centenares de euros (correspondientes a las tarifas más baratas de cada trayecto).

$$D = \begin{pmatrix} - & 2,3 & 3,8 & 6,2 & 4,5 \\ 2,1 & - & 1,6 & 4,4 & 6,2 \\ 3,4 & 2,5 & - & 7,5 & 2,2 \\ 7,6 & 4,0 & 7,0 & - & 5,2 \\ 5,1 & 7,5 & 1,7 & 5,8 & - \end{pmatrix}.$$

a) (1.5 puntos) Aplica el algoritmo de Dijkstra para encontrar la combinación más barata que te permita viajar desde la quinta ciudad a la segunda con coste mínimo.

b) (0.5 puntos) Indica el trayecto asociado a dicha combinación.

Solución. Para aplicar el algoritmo de Dijkstra formamos un vector de distancias directas del nodo inicial (el quinto) a los demás, u_0, que vale

$$u_0 = \begin{pmatrix} 5,1 & 7,5 & 1,7 & 5,8 & 0 \end{pmatrix}.$$

A continuación actualizamos estos valores mediante la fórmula

$$u_{k+1}^i = \text{mín}\{u_k^i, u_k^j + d_{ji}\},$$

donde j es la ciudad con menor coste en la iteración actual. En nuestro caso seleccionamos la ciudad 3 por ser la que tiene un coste más bajo, y actualizamos valores según

$$\begin{aligned} u_1 &= \text{mín}\{\begin{pmatrix} 5,1 & 7,5 & 1,7 & 5,8 & 0 \end{pmatrix}, 1,7 + \begin{pmatrix} 3,8 & 1,6 & 0 & 7,0 & 1,7 \end{pmatrix}\} \\ &= \begin{pmatrix} 5,1 & 3,3 & 1,7 & 5,8 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El siguiente nodo con coste menor es el segundo, esto es, la ciudad a la que queremos viajar. Como se tiene la propiedad (por ser los costes positivos) de que esta cantidad no puede decrecer en iteraciones posteriores, el coste más reducido de 5 a 2 es 4.2.

Dicho coste se obtiene haciendo una escala intermedia en la ciudad 3.

4. (3 puntos) En un hospital se dispone de un equipo de médicos que pueden llevar a cabo cierto tipo de operaciones quirúrgicas. Los pacientes que requieren estas operaciones llegan al hospital de manera aleatoria, pero se puede suponer que sus tiempos entre llegadas siguen una distribución exponencial con media 3,6 dias. El equipo médico necesita un tiempo para atender a cada paciente que es aleatorio, y que también supondremos exponencial con una tasa de 0,3 tratamientos por día.

Se pide que calcules:

a) (1 punto) El número medio de pacientes en el sistema en un momento cualquiera.

b) (1 punto) El porcentaje del tiempo que el equipo médico está desocupado.

c) (1 punto) El tiempo medio de espera de un paciente.

Solución. Se trata de un problema de teoría de colas, en el que se nos describe una cola de atención a pacientes en la que se tiene un tiempo entre llegadas exponencial con media 3,6 y el tiempo de servicio también es exponencial con media $1/0,3 = 3,33$. El número de servidores es uno (un equipo). Por tanto se trata de una cola M/M/1.

Para esta cola, el número medio de pacientes en el sistema viene dado por

$$E[N] = \frac{\rho}{1-\rho}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

En nuestro caso,

$$\lambda = 1/E[T] = 1/3,6 = 0,278 \quad \mu = 1/E[S] = 0,3 \quad \rho = \lambda/\mu = 0,926$$

Por tanto, el número medio de pacientes en el sistema vale

$$E[N] = \frac{0,926}{1-0,926} = 12,5$$

El porcentaje de tiempo que el equipo médico está desocupado viene dado para esta cola por $1-\rho = 0,074$, esto es, un $7,4\,\%$.

Por último, el tiempo medio de espera de un paciente se puede obtener como

$$E[W] = \frac{1}{\mu}\frac{}{1-\rho} = 45 \text{ días.}$$