Examen de Investigación Operativa

16 de febrero de 2006

Problema 1. (2 puntos) Un técnico de sistemas del laboratorio de cálculo de la Escuela Politécnica Superior quiere acceder a cinco archivos distintos. Hay copia de estos archivos en distintas cintas de backup, como se muestra en la tabla siguiente:

f1	C1, C2, C5, C6, C8, C9, C10
f2	C1, C3
f3	C2, C5, C7, C10
f4	C3, C6, C8
f5	C1, C2, C4, C6, C7, C9, C10

Los tamaños de las cintas de backup C1, . . . ,C10 son

$$(30, 50, 10, 20, 10, 40, 30, 10, 20, 20).$$

Para poder recuperar los archivos, primero hay que hacer un volcado de las cintas al disco duro. Éste tiene que ser de la cinta completa, no puede copiarse sólo una parte.

a) (1 punto) Formula un problema de programación lineal entera que determine el conjunto de cintas a volcar de forma que se ocupe el menor espacio de disco posible y se puedan recuperar todos los archivos.

b) (1 punto) ¿Cómo le añadirías al modelo las siguientes restricciones?
- No se pueden volcar a la vez las cintas 1, 9 y 10.
- Si no se vuelca la cinta 3, debe volcarse la 1.
- Si se vuelca la cinta 2 o la 5, no pueden volcarse ni la 6, ni la 9.

Solución. .

a) Para formular este problema definimos una variable binaria para cada cinta:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \texttt{si volcamos la cinta } i \\ 0 & \texttt{en caso contrario} \end{cases}$$

El modelo será:

$$\begin{array}{rll} \textit{Minimizar} & 30x_1 + 50x_2 + 10x_3 + 20x_4 + 10x_5 + 40x_6 + 30x_7 + 10x_8 + 20x_9 + 20x_{10} & \\ \textit{suj. a} & x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_8 + x_9 + x_{10} \geqslant 1 & (1) \\ & x_1 + x_3 \geqslant 1 & (2) \\ & x_2 + x_5 + x_7 + x_{10} \geqslant 1 & (3) \\ & x_3 + x_6 + x_8 \geqslant 1 & (4) \\ & x_1 + x_2 + x_4 + x_6 + x_7 + x_9 + x_{10} \geqslant 1 & (5) \\ & x_i \in \{0, 1\}; i = 1, \ldots, 10 & \end{array}$$

Para cada archivo i, la restricción (i) asegura que se vuelca alguna de las cintas que lo contienen.

b) Las restricciones adicionales se pueden modelar como sigue:

a) $x_1 + x_9 + x_{10} \leqslant 2$.

b) $x_1 \geqslant (1 - x_3)$ *o, sencillamente* $x_1 + x_3 \geqslant 1$.

c) *En este caso existen varias alternativas. La más sencilla es incluir las cuatro restricciones:*

$$x_2 + x_6 \leqslant 1; x_2 + x_9 \leqslant 1; x_5 + x_6 \leqslant 1; x_5 + x_9 \leqslant 1$$

Otra posibilidad es modelar esta condición como:

$$x_6 + x_9 \leqslant 2 - 2x_2; x_6 + x_9 \leqslant 2 - 2x_5$$

Problema 2. (2 puntos) Considera el problema de programación lineal:

$$\begin{array}{rl} \text{Maximizar} & 3x + y \\ \text{suj. a} & 2x + y \geqslant 4 \\ & -2x + 3y \leqslant 4 \\ & -x + 3y \geqslant -3 \\ & x, y \geqslant 0 \end{array}$$

a) (1 punto) Da toda la información que puedas sobre el punto $(2, 0)$.

b) (1 punto) ¿El problema es acotado? En caso afirmativo, encuentra la solución óptima. En caso negativo, dado un valor V suficientemente grande, debería existir una solución factible con ese valor. Da una expresión (en función de V) de dicha solución. Utiliza esa expresión para encontrar una solución factible con valor 150.

Solución. .

a) Pasamos el problema a forma estándar:

$$\begin{array}{rl} -\textit{Minimizar} & -3x - y \\ \textit{suj. a} & 2x + y - s_1 = 4 \\ & -2x + 3y + s_2 = 4 \\ & -x + 3y - s_3 = -3 \\ & x, y, s_1, s_2, s_3 \geqslant 0 \end{array}$$

Sustituyendo (x, y) *por* $(2, 0)$ *en las ecuaciones anteriores obtenemos*

$$(s_1, s_2, s_3) = (0, 8, 1) \geqslant 0$$

Por tanto se trata de una solución factible.

Las variables no nulas son $\{x, s_2, s_3\}$, *cuya matriz asociada es* $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *que es no singular.*

La solución es básica factible y, por tanto, un vértice de la región factible.

Para esta solución tenemos

$$\lambda = (\frac{-3}{2}, 0, 0); \sigma = (\frac{1}{2}, \frac{-3}{2})$$

Como uno de los costes reducidos es estrictamente negativo y estamos resolviendo el problema como uno de minimización, la solución que tenemos no es óptima.

b) *Si entramos a la base la variable s_1 la única candidata a salir es s_3. Este cambio de base nos lleva al punto $(x, y) = (3, 0)$.*

Para este nuevo punto

$$\lambda = (0, 0, 3); \sigma = (-10, 30).$$

Así, ésta tampoco es una solución óptima. La variable y es la única candidata a entrar a la base. La dirección de movimiento es

$$P_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; p_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \geqslant 0$$

Por tanto el problema es no acotado. Todos los puntos

$$x(\lambda) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para $\lambda \geqslant 0$ son factibles, y $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}^T$ define una dirección de descenso (ascenso si pensamos en el problema original, de maximización).

Si nos fijamos sólo en las variables originales, tenemos

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El valor de $P(\lambda)$ según la función objetivo del problema original es $9 + 10\lambda$; este rayo nos proporciona soluciones con cualquier valor $\geqslant 9$. Así, para $V \geqslant 9$ cualquiera, como $9 + 10\lambda = V \Rightarrow \lambda = \frac{V-9}{10}$, el punto

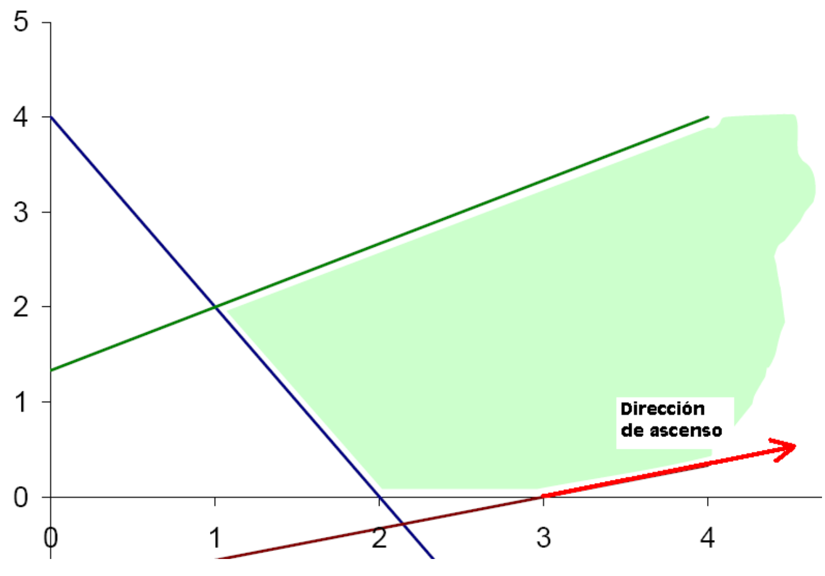
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{V-9}{10} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

será un punto factible con valor V.

La solución

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{141}{10} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{453}{10} \\ \frac{141}{10} \end{pmatrix}$$

tiene valor 150.



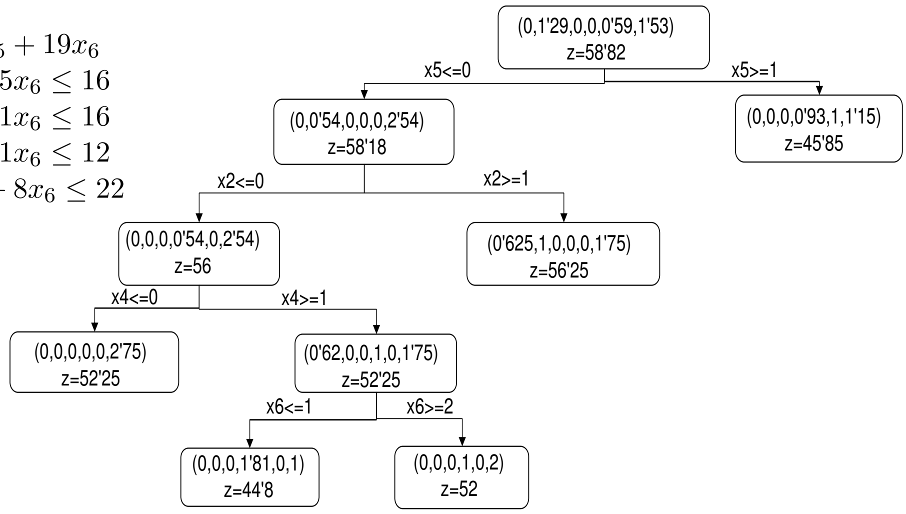
Problema 3. (2 puntos) Un fabricante de altavoces sabe que cualquier par de altavoces, al ser conectado a un equipo de música, interfiere ligeramente. Para mejorar la calidad del producto, se ha medido la distorsión producida por cada par de altavoces (i, j): d_{ij}.

Explica qué problema debe resolver el fabricante para decider qué altavoces es mejor vender juntos.

Solución. *Si construimos un grafo completo con un nodo por cada altavoz y pesos d_{ij} en los arcos, podemos encontrar la foma de emparejar los altavoces de forma que la distorsión total de todas las parejas sea lo menor posible resolviendo un problema del emparejamiento perfecto de peso mínimo.*

Problema 4. (2 puntos) A continuación se representa el árbol de ramificación y acotación (*branch and bound*) correspondiente a una iteración en la resolución del siguiente problema de programación lineal:

$$
\begin{array}{rl}
\max & 8x_1 + 18x_2 + 5x_3 + 14x_4 + 11x_5 + 19x_6 \\
\text{s.a} & 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 1x_5 + 5x_6 \leq 16 \\
& 9x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 1x_5 + 1x_6 \leq 16 \\
& 1x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 9x_5 + 1x_6 \leq 12 \\
& 8x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 3x_4 + 10x_5 + 8x_6 \leq 22 \\
& x_1, \ldots, x_6 \in \mathbb{Z}_+
\end{array}
$$



a) (1 punto) Determina razonadamente qué ramas han sido ya exploradas y qué ramas del árbol quedarían por explorar (si es que queda alguna). Para cada una de las ramas que aún no están exploradas, plantear el subproblema, o subproblemas, a resolver que cuelgan directamente de esa rama.

b) (1 punto) A partir de lo anterior, decide si se ha detectado un óptimo o no. En caso negativo, si se para aquí el algoritmo, ¿qué solución propondrías?, ¿cómo medirías la calidad de la misma?

Solución.

Problema 5. (2 puntos) Una empresa mantiene satisfactoriamente un departamento de ventas por catálogo en el cual el empleado toma las órdenes por teléfono: Si el empleado esta ocupado en la línea, las llamadas telefónicas entran automáticamente al departamento de catálogos y son contestadas por una grabadora que solicita esperar. Tan pronto el operador esté libre, se comunica con el cliente que ha esperado más. Las llamadas llegan a una tasa de 12 por hora. El empleado es capaz de tomar una orden en un promedio de cuatro minutos. Las llamadas tienden a seguir una distribución de Poisson y los tiempos de servicio tienden a ser exponenciales.

Al empleado se le pagan 5€ por hora. Debido a la mala publicidad y a la pérdida de futuros clientes, la empresa pierde aproximadamente 25€ por hora de tiempo que el cliente pasa esperando para que el empleado le tome la orden.

a) (0.5 puntos) ¿Cuál es el tiempo promedio que los clientes de catálogo deben de esperar, antes de que sus llamadas sean transferidas al empleado que recibe las órdenes?

b) (0.5 puntos) ¿Cuál es el numero promedio de clientes que esperan para colocar la orden?

c) (1 punto) La empresa está considerando añadir un segundo empleado para tomar las llamadas. La tienda puede pagarle el mismo sueldo que al empleado actual. ¿Debe de contratar otro empleado?

Puedes ayudarte de alguna de las fórmulas siguientes:

	p_0	p_n	L
$M/M/1$	$1-\rho$	$\rho^n p_0$	$\frac{\rho}{1-\rho}$
$M/M/s$	$\frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \frac{1}{1-\rho}}$	$\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} p_0; \quad n \leqslant s$ $\frac{(\lambda/\mu)^s}{s! s^{n-s}} p_0; \quad n > s$	$\frac{(\lambda/\mu)^s p_0 \rho}{s!(1-\rho)^2} + \frac{\lambda}{\mu}$
$M/M/1/K$ $(\rho \neq 1)$	$\frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$	$\rho^n p_0$	$\frac{\rho(1-(K+1)\rho^K + K\rho^{K+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{K+1})}$
$M/M/1/K$ $(\rho = 1)$	$\frac{1}{K+1}$	$\frac{1}{K+1}$	$\frac{K}{2}$

Solución. *Actualmente, se puede modelizar el departamento con una cola $M/M/1$ con $\lambda = 12$ llegadas por hora, $\mu = 60/4 = 15$ órdenes por hora y $\rho = \lambda/\mu = 4/5$.*

$\rho < 1$, por tanto, el sistema tiene estado estacionario.

a) Nos piden W_q.

$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{4}{15} \textit{ horas } = 15 \textit{ minutos}$$

b) El número medio de clientes esperando a ser atendidos será

$$L_q = \lambda W_q = 3.2$$

c) Con la situación actual, una hora de funcionamiento del departamento supone un coste de $5 \cdot 1 + 25 \cdot 3.2 = 85$€. (salario + costes por espera)

Si se contratara un segundo empleado el departamento pasaría a comportarse como una M/M/2. Ahora $\rho = 2/5$.

$p_0^{-1} = 1 + 4/5 + \frac{(4/5)^2}{2} \frac{1}{3/5} = 7/3.$

$p_0 = 3/7$

$$L_q = \cdots = 16/105$$

Con la nueva situación, una hora de funcionamiento pasaría a costar:

$$5 \cdot 2 + 25 \cdot \frac{16}{105} \simeq 13.8\text{€},$$

que es mucho inferior al coste actual. Por tanto, sí merece la pena contratar a otro empleado.