UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
Ingeniería Informática
Examen de Investigación Operativa
3 de febrero de 2005

---

1. (3 puntos) Una gran empresa ha decidido cerrar sus centros de producción más pequeños, y reasignar a sus empleados a otros centros de producción más grandes, en ciudades vecinas. Cada trabajador desplazado recibirá un complemento de sueldo por destino, proporcional a la distancia entre su puesto de trabajo original y su nuevo centro.

   Las distancias entre los centros que se van a cerrar (C1, C2 y C3) y los centros donde se pueden admitir nuevos empleados (A1, A2, A3, A4 y A5) vienen dadas en la siguiente tabla:

	A1	A2	A3	A4	A5
C1	65	50	110	145	90
C2	70	65	80	105	115
C3	15	5	240	55	30

   Algunos de los empleados han preferido cambiar de empleo o jubilarse y, finalmente, deberán ser reubicados 34 trabajadores de C1, 23 de C2 y 32 de C3. Para poder reubicarlos, la empresa ha habilitado 12 nuevos puestos en A1, 16 en A2, 20 en A3, 21 en A4 y 20 en A5.

   a) (1 punto) ¿Qué problema de programación lineal puede ayudar a la empresa a decidir cuántos empleados de cada centro C deben ir a cada centro A de forma tal que el coste total en complementos por destino sea el menor posible?

   b) (1 punto) Encuentra una solución básica factible para este problema de la forma más sencilla que puedas.

   c) (0.5 puntos) Compara la solución que has encontrado con la solución dada en la tabla siguiente:

	A1	A2	A3	A4	A5
C1	10	11	0	0	13
C2	0	0	20	3	0
C3	2	5	0	18	7

   ¿Cuál de las dos utilizarias para inicializar el algoritmo del símplex?

   d) (0.5 puntos) Enumera las técnicas que conozcas para resolver este tipo de problemas. Indica las diferencias entre ellas.

Solución

a) En realidad, podemos ver este problema como un problema de transporte. Los orígenes son los tres centros C y los destinos los cinco centros A.

Podemos tomar como costes de transporte las distancias entre los distintos centros ya que sabemos que los complementos que reciba cada empleado serán proporcionales a esa distancia.

Tomaremos como producción de cada origen el número de empleados que parten de ese centro, y como “demanda” de cada destino el número de puestos que se han habilitado.

Las “cantidades” transportadas serán el número de trabajadores que pasan de Ci a Aj. Aunque el número de trabajadores sea entero por naturaleza, la propiedad de integridad de los problemas de transporte nos permite resolverlo como un problema lineal ya que sabemos que éste tiene un óptimo entero.

La suma de los empleados que deben abandonar los centros que cierran es igual a 89, que coincide con el número total de puestos habilitados, de manera que el problema es equilibrado y no habrá ningún problema de infactibilidad.

b) Para encontrar una solución básica factible utilizamos la heurística de la esquina noroeste. La solución que nos proporciona esta heurística es:

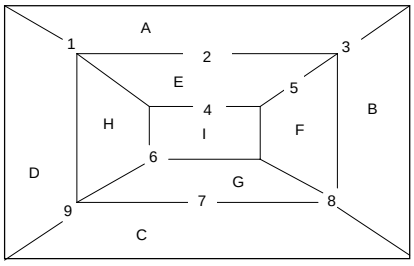
	A1	A2	A3	A4	A5	total
C1	12	16	6			34
C2			14	9		23
C3				12	20	32
	12	16	20	21	20	

La distancia acumulada por todos los trabajadores es 5565.

c) La solución que nos proporcionan es una solución factible, con una distancia acumulada de 5540, por tanto, es una solución mejor que la que hemos encontrado. No obstante, esta solución no la podemos utilizar para inicializar el método del símplex ya que no es una solución básica (tenemos un problema con 8 restricciones, por tanto las bases están compuestas por 8 variables, y esta solución tiene 9 variables con valores positivos).

d) Básicamente existen dos tipos de técnicas para resolver problemas lineales: el método simplex y el método de punto interior. El método simplex se mueve de vértice a vértice mientras que el de punto interior se mueve por puntos en el interior de la región factible. El método simplex tiene una complejidad computacional exponencial mientras que el de punto interior es polinomial. Por contra, cada iteración del método simplex es mucho menos costosa que la de punto interior.

2. (2.5 puntos) En una galería de arte cuyo plano es el de la figura, se desean instalar cámaras de video para tenerla completamente vigilada. Hay 9 zonas $A, B, \ldots, I$, y 9 posibles puntos $1, \ldots, 9$ de instalación de las cámaras. Una cámara colocada en cualquiera de los puntos señalados vigila todas las zonas adyacentes a dicho punto. Por consideración a los visitantes, no se permite que más de 2 cámaras vigilen la misma zona.



Además, si la zona A queda vigilada sólo por una cámara, entonces la zona B debe quedar vigilada por 2 cámaras y la zona D sólo por 1.

Las cámaras situadas en puntos capaces de vigilar 2, 3 y 4 zonas cuestan 5, 7 y 8 unidades monetarias, respectivamente.

Formula el correspondiente modelo para determinar qué cámaras se deben instalar de manera que se minimice el coste total y se cumplan las condiciones anteriores.

Solución. Se trata esencialmente de un problema de cubrimiento. Hay que decidir qué camaras se instalan: *variables de decisión binarias*

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si la cámara } i \text{ se instala} \\ 0 & \text{si no se instala} \end{cases}, \quad i = 1, \ldots, 9$$

Las condiciones de cubrimiento garantizan que cada zona queda vigilada:

$$\begin{array}{ll} \text{Zona A:} & x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ \text{Zona B:} & x_3 + x_8 \geq 1 \\ \text{Zona C:} & x_7 + x_8 + x_9 \geq 1 \\ \text{Zona D:} & x_1 + x_9 \geq 1 \\ \text{Zona E:} & x_2 + x_4 + x_5 \geq 1 \\ \text{Zona F:} & x_5 + x_8 \geq 1 \\ \text{Zona G:} & x_6 + x_7 + x_8 \geq 1 \\ \text{Zona H:} & x_6 \geq 1 \\ \text{Zona I:} & x_4 + x_6 \geq 1 \end{array}$$

La condición de que no más de 2 cámaras vigilen simultáneamente una zona es necesaria sólo para las zonas accesibles desde más de 2 cámaras:

$$\begin{array}{ll} \text{Zona A:} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ \text{Zona C:} & x_7 + x_8 + x_9 \leq 2 \\ \text{Zona E:} & x_2 + x_4 + x_5 \leq 2 \\ \text{Zona G:} & x_6 + x_7 + x_8 \leq 2 \end{array}$$

Para modelar las implicaciones "si la zona A queda vigilada sólo por una cámara, entonces la zona B debe quedar vigilada por 2 cámaras y la zona D sólo por 1", es suficiente con tener en cuenta que $x_1 + x_2 + x_3$ = número de cámaras que vigilan la zona A sólo puede ser igual a 1 ó 2:

$$\begin{array}{l} x_3 + x_8 \geq 3 - x_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 + x_9 \leq x_1 + x_2 + x_3 \end{array}$$

3. (2 puntos) Se desea comunicar mediante fibra óptica ocho centros de investigación. El coste del sistema es función lineal de la longitud de la línea tendida. La siguiente tabla recoge las distancias entre los centros:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-	12	34	23	56	76	35	21
2		-	54	98	65	124	80	76
3			-	76	87	34	12	89
4				-	234	48	39	65
5					-	63	79	24
6						-	69	53
7							-	31
8								-

Se desea tender la línea de manera que haya una conexión con cada centro, pero sin ciclos. Determina cuál es el tendido más económico de línea entre los centros.

Solución. Para encontrar el tendido más económico sólo necesitamos encontrar un árbol de expansión de coste mínimo. Podemos utilizar, por ejemplo, el algoritmo de Kruskal.

Una solución óptima sería la formada por los arcos (1, 2), (1, 4), (1, 8), (3, 6), (3, 7), (5, 8), (7, 8), con coste 157.

4. (2.5 puntos) En un centro de salud con tres médicos, los pacientes llegan de forma aleatoria (tiempos de llegada exponenciales) a razón de 12 por hora. Éstos son atendidos en orden de llegada por el primer médico que esté libre. Cada médico tarda una media de 13 minutos en atender a cada paciente (tiempos de atención exponenciales).

   a) (1 punto) Calcula la proporción de tiempo que está cada médico atendiendo a pacientes.

   b) (1 punto) Calcula el número medio de pacientes que están en la sala de espera. Calcula el tiempo medio total de espera de un paciente.

   c) (0.5 puntos) ¿Qué ocurriría en el centro si uno de los 3 médicos se ausenta?

   Puedes ayudarte de alguna de las fórmulas siguientes:

	p_0	p_n	L
$M/M/1$	$1-\rho$	$\rho^n p_0$	$\frac{\rho}{1-\rho}$
$M/M/s$	$\frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}+\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\frac{1}{1-\rho}}$	$\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}p_0; \quad n \leqslant s$ $\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!s^{n-s}}p_0; \quad n > s$	$\frac{(\lambda/\mu)^s p_0 \rho}{s!(1-\rho)^2}+\frac{\lambda}{\mu}$
$M/M/1/K$ $(\rho \neq 1)$	$\frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$	$\rho^n p_0$	$\frac{\rho(1-(K+1)\rho^K+K\rho^{K+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{K+1})}$
$M/M/1/K$ $(\rho = 1)$	$\frac{1}{K+1}$	$\frac{1}{K+1}$	$\frac{K}{2}$

Solución.

a) Es un modelo $M/M/3$ donde se sabe que la tasa de llegadas es $\lambda = 12$ pacientes por hora y la tasa de servicio es de $\mu = 60/13 = 4.62$ pacientes por hora. Por tanto, la tasa de utilización del centro es $\rho = \frac{\lambda}{3\mu} = 13/15 = 0.87$.

b) $L_q = 4.93$ pacientes, $W_q = 0.41$ horas y $W = 0.63$ horas.

c) En este caso $\rho > 1$ por lo que el sistema no es estacionario y la línea de espera aumenta indefinidamente.