UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
Ingeniería Informática
Examen de Investigación Operativa
29 de enero de 2004

---

1. (1.5 puntos) Los estudiantes de último curso han decidido vender camisetas para financiar su viaje de fin de carrera. Planean hacer camisetas de tres tallas: S, M, y L, que van a vender, respectivamente, a 8, 9 y 10 euros. A ellos, las pequeñas (S) les cuestan 5 euros, y tanto las medianas (M) como las grandes (L), 6 euros. Deben pagar las camisetas antes de venderlas, y tienen un presupuesto de 200 euros. La empresa que imprime las camisetas les exige que el número de camisetas de talla L no supere la mitad del total. Los estudiantes saben que podrán vender todas las camisetas que compren.

   a) (0.75 puntos) Escribe el modelo que los estudiantes deberán resolver para saber cuántas camisetas de cada tipo deben encargar, si quieren maximizar el beneficio total.

   b) (0.25 puntos) Escribe el modelo anterior en forma estándar.

   c) (0.5 puntos) Una posibilidad es encargar 28 camisetas pequeñas, ninguna mediana y 10 grandes. ¿Es ésta una solución básica factible de la relajación lineal de tu problema?
   ¿Qué información te da esta solución acerca del óptimo de tu problema?

Solución. Usaremos las variables x_i = número de camisetas de talla i, donde $i = 1, 2, 3$ representan, respectivamente, las tallas S, M, y L. Los beneficios asociados a las tres tallas (precio - coste) son 3, 3, y 4 euros. El modelo resultante es:

$$\begin{array}{rl} \text{Maximizar} & 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{sujeto a} & 5x_1 + 6x_2 + 6x_3 \leqslant 200 \\ & x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 \geqslant 0 \\ & x \geqslant 0 \text{ y enteras} \end{array}$$

La forma estándar de este modelo será:

$$\begin{array}{rl} -\text{Minimizar} & -3x_1 - 3x_2 - 4x_3 \\ \text{sujeto a} & 5x_1 + 6x_2 + 6x_3 + s_1 = 200 \\ & x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 - s_2 = 0 \\ & x \geqslant 0 \text{ y enteras; } s \geqslant 0 \end{array}$$

La solución que se nos propone es $x = (28, 0, 10)$. Las holguras asociadas a esta solución son $s = (0, 18)$. Por tanto, hay un total de tres variables con valores estrictamente positivos y sólo dos valen 0, mientras que en cualquier solución básica de la relajación lineal de este problema habrá tres variables no básicas (cuyo valor es necesariamente 0); es decir, esta solución no es básica, aunque sí es factible.

La solución $x = (28, 0, 10)$ es una solución factible del problema inicial, y tiene un beneficio asociado de 124 euros. Por tanto, sabemos que el beneficio asociado a la solución óptima es mayor o igual a 124 euros.

2. (2.5 puntos) Considera el problema de programación entera:

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ \text{sujeto a} & \qquad\quad x_2 - 4x_3 \leqslant 10 \\ & x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 \geqslant 1 \\ & 2x_1 - \ \ x_2 \qquad\quad \geqslant 0 \\ & x \geqslant 0 \text{ y enteras} \end{array} \tag{PE}$$

a) (0.5 puntos) Comprueba que la base formada por x_1 y las holguras correspondientes a la primera y tercera restricciones proporciona una solución factible de (PE).

b) (1 puntos) Resuelve la relajación lineal de (PE).

c) (0.5 puntos) Genera un corte de Gomory asociado a esta solución.

d) (0.5 puntos) Describe los siguientes subproblemas que deberías resolver si quieres aplicar el método de Branch and Bound, ramificando por la primera variable no entera.

Solución. Las columnas de las variables que nos proponen son linealmente independientes; por tanto, forman una base. Tenemos

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

Para saber si la solución asociada a esta base es factible para (PE), solo necesitamos comprobar si sus componentes son no negativas y enteras. (Por construcción de la solución básica ya sabemos que va a satisfacer las restricciones, y que habrá al menos $n-m$ variables con valor 0.) Se tiene que:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Efectivamente, las componentes de esta solución básica son positivas y enteras, por lo que la solución es factible. Además, el valor de esta solución es $z = 3$.

Para resolver la relajación lineal de (PE) usamos como solución inicial la propuesta en el apartado (a). Los multiplicadores para esta solución son $\lambda = (0\ 3\ 0)$ y los costes reducidos, $\sigma = (-1\ 8\ 3)$. x_2 debe entrar a la base. La dirección de movimiento viene dada por $P_B^{\mathsf{T}} = (-1\ \ -1\ \ -3)$, y la longitud de paso $\alpha = 2/3$ viene determinada por s_3, que deberá abandonar la base. Para la nueva base $\{x_1, x_2, s_1\}$, obtenemos costes reducidos $\sigma = \frac{1}{3}(22\ 7\ 1) \geqslant 0$, por tanto, ésta es la base óptima. Los valores de las variables para esta solucion son $x^* = \frac{1}{3}(1\ 2\ 0)$, con holguras $s^* = \frac{1}{3}(28\ 0\ 0)$. El valor de esta solución es $z^* = 7/3 \simeq 2.33$.

Los cortes de Gomory correspondientes a las variables x_1 y x_2 son:

$$\begin{cases} 2x_3 + 2s_2 + 2s_3 & \geqslant 1 \\ x_3 + s_2 + s_3 & \geqslant 2, \end{cases}$$

donde s_i representa la holgura de la i-ésima restricción.

Si quisiéramos aplicar el método de branch and bound para resolver (PE), ahora generaríamos dos nuevos subproblemas, ramificando en x_1. Los dos subproblemas que deberemos generar son los que se obtienen añadiendo a la relajación de (PE) las restricciones $x_1 \leqslant 0$ y $x_1 \geqslant 1$, respectivamente.

De todos modos, la solución de la relajación lineal nos proporciona una cota inferior de 2.33 para el óptimo de nuestro problema. Puesto que todos los coeficientes de la f.o. son enteros, esta cota se puede refinar; sabemos que una cota inferior válida es 3. Por otro lado, la solución del apartado (a) es entera y tiene coste igual a 3, por lo que podemos concluir que esa es la solución óptima de (PE).

3. (2.5 puntos) Una empresa quiere reforzar su red interna de fibra óptica tendiendo nueva fibra entre dos centros de la misma. Para ello desea utilizar las canalizaciones ya existentes, las cuales tienen las longitudes que se indican en la tabla siguiente:

Desde	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5
Hasta	2	3	5	3	4	6	4	5	6	5	6	6
Longitud	4	3	5	1	3	5	2	2	5	1	1	3

Puedes suponer que los arcos indicados en la tabla son dirigidos.

a) (1 puntos) Teniendo en cuenta que el coste es proporcional a la longitud del camino de tendido, aplica el algoritmo de Dijkstra para encontrar el recorrido con coste más bajo posible que conecta 1 con 6. Indica las canalizaciones por las que pasa uno de los recorridos óptimos.

b) (1.5 puntos) Si cada segmento de fibra tendida tiene las capacidades que se indican en la tabla siguiente:

Desde	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5
Hasta	2	3	5	3	4	6	4	5	6	5	6	6
Capacidad	2	3	2	2	2	2	3	2	2	2	3	2

Aplica un algoritmo de flujo máximo exacto para encontrar la capacidad total de la conexión entre 1 y 6 así como los recorridos necesarios para alcanzar dicha capacidad máxima.

Solución. Para responder a la primera pregunta aplicaremos el algoritmo de Dijkstra partiendo de las distancias desde 1 a los demás nodos.

- Las distancias directas desde 1 son

Nodo	1	2	3	4	5	6
u^1	0	4	3	∞	5	∞

La distancia más corta es la correspondiente a 3, y escogemos ese nodo como referencia.

- Actualizamos las distancias mediante la fórmula

$$u_i^{k+1} = \text{mín}\{u_i^k, u_j^k + d_{ji}\},$$

donde j es el nodo de referencia, 3 en este caso.

Obtenemos como nuevos valores (los correspondientes a 1 y 3 no se revisan)

Nodo	1	2	3
u^2	0	$\text{mín}\{4, 3+1\} = 4$	3
Nodo	4	5	6
u^2	$\text{mín}\{\infty, 3+2\} = 5$	$\text{mín}\{5, 3+2\} = 5$	$\text{mín}\{\infty, 3+5\} = 8$

El siguiente nodo con la distancia más corta es el nodo 2.

- Actualizamos las distancias empleando a 2 como nodo de referencia. Obtenemos como nuevos valores (los correspondientes a 1, 2 y 3 no se revisan)

Nodo	1	2	3	4	5	6
u^3	0	4	3	$\text{mín}\{5, 4+3\} = 5$	$\text{mín}\{5, 4+\infty\} = 5$	$\text{mín}\{8, 4+5\} = 8$

Los siguientes nodos con la distancia más corta son los nodos 4 y 5. Escogemos primero el nodo 4 (obsérvese que el valor del nodo 5 no va a cambiar ya que ninguna longitud es cero o menor).

- Actualizamos las distancias empleando a 4 como nodo de referencia en primer lugar y luego a 5. Obtenemos como nuevos valores (solo se revisan los valores correspondientes a 6)

Nodo	1	2	3	4	5	6
u^4	0	4	3	5	5	$\text{mín}\{8, 5+1\} = 6$

Nodo	1	2	3	4	5	6
u^5	0	4	3	5	5	$\text{mín}\{6, 5+3\} = 6$

La distancia más corta es 6 y se obtiene llegando a 6 desde 4, a 4 desde 3 y a 3 desde 1 (los nodos en los que los valores correspondientes se actualizaron por última vez).

Para contestar a la segunda pregunta tenemos en cuenta las capacidades de la red y buscamos caminos de aumento de flujo.

- Para buscar estos caminos enviamos flujo desde 1. El flujo que podemos enviar viene dado por la tabla siguiente, donde se indica la cantidad de flujo que se puede hacer llegar desde 1 a cada nodo, y el nodo anterior en el camino

Hasta	1	2	3	4	5	6
Cantidad	∞	2	3	2	2	2
Desde	-	1	1	2	1	2

Hacemos llegar por tanto 2 unidades de flujo por el camino 1–2–6. Restamos ese flujo de las capacidades disponibles.

Desde	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5
Hasta	2	3	5	3	4	6	4	5	6	5	6	6
Cap. disp.	0	3	2	2	2	0	3	2	2	2	3	2

- Repetimos el proceso con las nuevas capacidades y obtenemos

Hasta	1	2	3	4	5	6
Cantidad	∞		3	3	2	2
Desde	-		1	3	1	3

Hacemos llegar ahora 2 unidades por el camino 1–3–6. Restamos las capacidades correspondientes y tenemos

Desde	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5
Hasta	2	3	5	3	4	6	4	5	6	5	6	6
Cap. disp.	0	1	2	2	2	0	3	2	0	2	3	2

- Repetimos el proceso con las capacidades revisadas y obtenemos

Hasta	1	2	3	4	5	6
Cantidad	∞		1	1	2	2
Desde	-		1	3	1	5

Hacemos llegar ahora 2 unidades por el camino 1–5–6. Restamos las capacidades correspondientes y tenemos

Desde	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5
Hasta	2	3	5	3	4	6	4	5	6	5	6	6
Cap. disp.	0	1	0	2	2	0	3	2	0	2	3	0

- Repitiendo el proceso

Hasta	1	2	3	4	5	6
Cantidad	∞		1	1	1	1
Desde	-		1	3	3	4

Hacemos llegar ahora 1 unidad por el camino 1–3–4–6. Restamos las capacidades correspondientes y tenemos

Desde	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5
Hasta	2	3	5	3	4	6	4	5	6	5	6	6
Cap. disp.	0	0	0	2	2	0	2	2	0	2	2	0

- Si repetimos el proceso tenemos que no nos quedan capacidades para hacer salir flujo desde 1, y por tanto el flujo máximo es de 7 unidades por los caminos 1–2–6 (2), 1–3–6 (2), 1–5–6 (2) y 1–3–4–6 (1).

4. (2.5 puntos) Una gestoría dispone de tres personas que atienden al público; cada una de ellas tarda una media de 10 minutos en atender a un cliente.

   a) (1 puntos) Supongamos que los clientes llegan con una tasa de 15 por hora.
   - ¿Con qué probabilidad un cliente tiene que esperar para ser atendido?
   - ¿Cuál es el número medio de clientes en la cola?
   - ¿Cuál es el tiempo medio de espera en la gestoría?

   b) (1 puntos) Supongamos que se estructura la gestoría en tres servicios: uno dedicado a las gestiones de compra/venta, el segundo para documentación (DNI, pasaportes, carnets de conducir,...) y el tercero para las restantes gestiones. Ahora, la tasa de llegada de los clientes a cada uno de los servicios es de 5 por hora. Además, cada uno de los tres empleados está asignado a un único servicio.
   - ¿Con qué probabilidad un cliente tiene que esperar para ser atendido?
   - ¿Cuál es el número medio de clientes en la cola?
   - ¿Cuál es el tiempo medio de cada cliente en la gestoría?

   c) (0.5 puntos) ¿Cuál de las 2 alternativas anteriores te parece más conveniente? Razónalo.

Puedes ayudarte de alguna de las fórmulas siguientes:

	p_0	p_n	L
$M/M/1$	$1-\rho$	$\rho^n p_0$	$\frac{\rho}{1-\rho}$
$M/M/s$	$\frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}+\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\frac{1}{1-\rho}}$	$\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}p_0;\quad n\leqslant s$ $\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!s^{n-s}}p_0;\quad n>s$	$\frac{(\lambda/\mu)^s p_0\rho}{s!(1-\rho)^2}+\frac{\lambda}{\mu}$
$M/M/1/K$ $(\rho\neq 1)$	$\frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$	$\rho^n p_0$	$\frac{\rho(1-(K+1)\rho^K+K\rho^{K+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{K+1})}$
$M/M/1/K$ $(\rho=1)$	$\frac{1}{K+1}$	$\frac{1}{K+1}$	$\frac{K}{2}$

Solución.

a) El sistema del primer caso es una cola M/M/3 con $\lambda = 15$ y $\mu = 6$. El factor de carga es $\rho = \frac{\lambda}{3\mu} = 5/6 < 1$, y por tanto existe el estado estacionario.
- La probabilidad de que un cliente tenga que esperar en el primer caso viene dada por

$$1-(P_0+P_1+P_2) = 1-P_0\left(1+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\right)$$

Donde

$$P_0^{-1} = 1+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3}{3!(1-\rho)};\quad P_0=\frac{4}{89}$$

La probabilidad que se nos pide es $\frac{125}{178} \simeq 0.70$.

- El número medio de clientes en la cola es

$$L_q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0\rho}{3!(1-\rho)^2} = \frac{625}{178} \simeq 3.51 \text{ clientes}$$

- $$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{107}{267} \text{ horas} \simeq 24 \text{ minutos.}$$

b) En este apartado tenemos tres colas M/M/1 independientes, todas con $\lambda = 5$ y $\mu = 6$. Ahora $\rho = 5/6 < 1$.

1) La probabilidad de que un cliente tenga que esperar sera

$$1 - P_0 = \rho = \frac{5}{6} \simeq 0.83$$

2) El número medio de clientes en cada cola es

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{25}{6}.$$

Entre las tres colas tendremos, en media, un total de $3L_q = 12.5$ clientes esperando.

3)

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 1 \text{ hora.}$$

c) Con la reestructuración propuesta se aumentan tanto la probabilidad de que un cliente tenga que esperar, como el tiempo que cada cliente pasa en la gestoría. Además, en media, el número de clientes que estén esperando para ser atendidos también será mayor. Por tanto, en lo que al rendimiento del sistema de colas se refiere, no es aconsejable hacer esta reestructuración.

5. (1 puntos) Decide si las siguientes dos afirmaciones son verdaderas o falsas razonando tu respuesta.

a) (0.5 puntos) Para generar números aleatorios es necesario generar primero números pseudo-aleatorios y después aplicarles la transformación adecuada según la distribución de probabilidad que nos interese.

b) (0.5 puntos) Dado un problema de programación lineal en forma estándar, cada conjunto de columnas de la matriz de restricciones que forma una base determina una solución básica factible.

Solución. El primer enunciado es falso. Las secuencias de números que obtenemos mediante algoritmos deterministas nunca podrán ser realmente aleatorios y reciben el nombre de números pseudo-aleatorios, puesto que pretenden imitar la aleatoriedad. Mediante transformaciones de números aleatorios podemos conseguir muestras de variables aleatorias.

El segundo enunciado también es falso. En general, cada conjunto de columnas de la matriz de restricciones que forma una base determina una solución que satisface las restricciones específicas del problema, pero no tiene por qué satisfacer las restricciones de no negatividad. Sólo en los casos en los que éstas también se cumplan tendremos soluciones factibles.