

---

# Simulación

**Simulación:** Proceso de estudiar el comportamiento de un sistema observando el comportamiento de un modelo que representa al sistema.  
Por tanto, simulación  $\simeq$  imitación.

Comienza en 1949 con el método de Monte Carlo (Von Neumann y Ulam). Como es una herramienta de apoyo a la toma de decisiones (igual que la Prog. Matemática) se incluye dentro de la Investigación Operativa.

- Introducción.
- Ejemplos.
- Metodología.
- Generación de números aleatorios.
- Aplicaciones.

---

# Introducción

- **¿Cuándo se utiliza?**

- Cuando no existe una formulación matemática o métodos de resolución analíticos (o son demasiado complejos).
- Cuando se desea experimentar con el sistema antes de su construcción.
- Cuando interesa controlar las condiciones del sistema y resulta imposible experimentar sobre el mismo.

Con simulaciones es posible estudiar el comportamiento de un sistema, imaginar situaciones para mejorarlo, etc. Además, se puede conseguir con unos costes bajos o poco peligrosos.

- **Objetivos de la simulación:** observar, predecir, modificar e incluso optimizar un sistema.

---

## Ejemplo 1

Una compañía que vende ordenadores quiere determinar cuántas licencias de un determinado sistema operativo comprar a Microsoft para suministrar con dichos ordenadores durante un año. Como el SO tiende a cambiar de un año a otro, esta compañía debería comprar a Microsoft tantas licencias como ordenadores venda ese año, pero evidentemente esta cantidad es desconocida.

Una licencia del SO actual le cuesta a la compañía 75 € que, al suministrarla con el ordenador, le genera unos ingresos de 120 €. Una vez que Microsoft lanza al mercado un nuevo SO la compañía puede devolver las licencias sobrantes a cambio de 60 €. Además, la compañía ha estimado que la cantidad de ordenadores que puede vender en el año es de  $1000 \pm 200$  (formalmente esta cantidad se distribuye según una  $\mathcal{N}(1000, 100^2)$ ).

- La decisión que se plantea es: ¿cuántas licencias del SO solicita a Microsoft?

---

## Ejemplo 1

Por ejemplo, si solicita 1000 licencias y la demanda es de 1100 ordenadores obtendrá un beneficio de 1000 euros. Pero si al final vende 915 ordenadores obtendrá un beneficio de 915 euros.

Por otra parte, si solicita 1050 licencias y la demanda es de 1100 ordenadores obtendrá un beneficio de 1050 euros. Pero si al final vende 915 ordenadores obtendrá un beneficio de 915 euros.

Por tanto, la decisión es complicada. Conviene realizar una simulación:

↳ Ver [newsboy.xls](#)

Si hiciésemos una cantidad suficientemente grande de replicaciones observaríamos que lo mejor sería solicitar 1067 licencias.

---

## Ejemplo 2

- Simulación de un modelo  $M/M/1$ .

Si la hora de inicio son las 10:00, ¿cuál sería la secuencia de los dos primeros clientes para los siguientes inputs?

Cliente	Tiempo entre llegadas	Hora de llegada	Tiempo de servicio	Inicio de servicio	Fin de servicio	Tiempo en cola	Tiempo total	Desocupación servidor
1	0:03:54		0:01:31					
2	0:01:22		0:00:53					

---

## Definiciones

- **Estado de un sistema:** conjunto de variables necesarias para describir un sistema en un instante particular de tiempo, relativo a los objetivos del estudio.
- Tipo de simulaciones: **discretas** o **continuas** en función de los estados que describan el paso del tiempo en la simulación.

En aplicaciones físicas o procesos químicos interesa monitorizar los cambios de temperatura o presión en función del tiempo y en este caso sería más apropiado utilizar un modelo de simulación continuo. Los modelos resultantes suelen ser conjuntos de ecuaciones diferenciales.

---

## Definiciones

- Ejemplo (continuo): el modelo de Lotka-Volterra para el sistema presa-predador. Se denota por  $x(t)$  al número de individuos presa en el instante  $t$  y por  $y(t)$  al número de individuos predador en el instante  $t$ .

El modelo es:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx(t) - ax(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} &= -sy(t) + bx(t)y(t),\end{aligned}$$

donde  $r$  indica la tasa de crecimiento en ausencia de predadores y  $s$  denota la tasa de variación en ausencia de presas.

---

## Definiciones

En aplicaciones de sistemas de colas, los sucesos como llegada de clientes y tiempos de servicios ocurren en distintos puntos en el tiempo, por lo que resulta apropiado utilizar modelos de simulación discretos.

Además, al ser estos sistemas dinámicos, básicamente existen tres tipos de esquemas para hacer avanzar el tiempo:

**Incrementos de tiempo fijo:** la simulación actualiza el estado del sistema determinando los sucesos que ocurren en un intervalo de tiempo fijo.

**Incrementos por suceso:** la simulación actualiza los tiempos y el estado del sistema en el momento de la ocurrencia del próximo suceso. Es el esquema más eficiente.

**Incrementos por clientes:** la simulación modela la secuencia lógica de los sucesos para cada cliente. No es lo más eficiente pero sí resulta apropiada para simulación en hojas de cálculo.

---

# Definiciones

↳ Nos centraremos en simulación en tiempo discreto.

- Las simulaciones pueden ser **deterministas** (no incluyen variables aleatorias) o **estocásticos** (contienen variables aleatorias).

---

# Metodología de Simulación

Proceso de simulación:

- **Formulación del problema:** se definen los objetivos y diseño del estudio. Se identifican las variables de entrada y de salida y su relación.
- **Construcción de un modelo:** ajustar el sistema con un modelo que lo represente bien.
- **Recolección de datos.**
- **Implementación de la simulación (diseño de programas):** generar valores de entrada y de salida y repetir un número suficiente de veces.
- **Verificación de la simulación:** comprobar que la simulación se realiza correctamente y es consistente con el modelo supuesto.
- **Validación:** ¿el modelo representa bien la realidad?

---

## Metodología de Simulación: Ejemplo 1

- Los datos son: el coste de cada licencia, el precio de venta, el precio de devolución, media y varianza de la distribución de demanda.
- El input es: cantidad de licencias solicitadas (determinista) y demanda (aleatorio).
- El output es: beneficio medio. También puede ser su variabilidad.

---

## Metodología de Simulación: Ejemplo 2

- Los datos son: la tasa de llegadas y la tasa de servicio.
- El input es: tiempo entre llegadas y tiempo de servicio (aleatorios).
- El output es: intensidad de tráfico, tiempo medio de espera, etc.

---

## Metodología de Simulación

- El error decrece con el número de repeticiones,  $N$ . Por ejemplo, al estimar  $\mu = E(Z)$  (siendo  $Z = c^T X^*$ ) con  $\hat{z} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N c^T x_i^*$  cometeremos un error de

$$\text{s.e.}(\bar{z}) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}.$$

Por tanto, si queremos un error 10 veces menor necesitamos una simulación 100 veces mayor.

---

## Generación de números aleatorios

En simulación de sucesos discretos, la primera etapa consiste en generar números aleatorios que nos permitan crear los sucesos a simular (generación de valores de entrada).

El procedimiento general para generar tales números será: primero generar números aleatorios que se originen a partir de la distribución uniforme: y aplicarles una transformación que los convierta en los números aleatorios deseados para utilizarlos en la simulación.

- Generación de **números aleatorios**: tienen que ser independientes e idénticamente distribuidos según  $U(0, 1)$ .

---

## Generación de números aleatorios

Los números aleatorios aparecen típicamente en ciertos procesos físicos (ruleta, lotería, 5 últimos dígitos del DNI, etc.). Son muy costosos de conseguir y de reproducir.

Nos conformaremos con generar **números pseudo-aleatorios**: en apariencia idénticos a los realmente aleatorios y muy poco costosos de generar (proviene de un procedimiento algorítmico).

Suelen estar basados en **generadores congruenciales**. Recordar que

$$x = y \pmod{m}$$

si  $x$  e  $y$  dan el mismo resto al dividir por  $m$ .

---

## Generación de números pseudo-aleatorios

Dadas constantes enteras positivas  $a$ ,  $b$  y  $m$  y un valor inicial o **semilla**,  $x_0$ , la generación de números pseudo-aleatorios,  $u_k$ , se obtiene como:

$$x_{k+1} = (ax_k + b) \pmod{m}$$

$$u_{k+1} = \frac{x_{k+1}}{m}$$

Para que la sucesión de números se parezca cada vez más a la uniforme,  $m$  tiene que ser más grande, pero por limitaciones, no puede ser más grande que el tamaño del mayor entero que pueda almacenar un ordenador, por lo que típicamente  $m \simeq 2^{31}$ .

---

## Generación de números pseudo-aleatorios

Un problema de esta generación es la aparición de ciclos: una vez que un valor de  $x$  se repite, los valores siguientes en la sucesión también.

Dado que los posibles valores de  $x$  son finitos, el ciclo siempre se va a producir, por lo que hay que intentar que los ciclos sean lo más largos posibles, esto es, más próximos al valor de  $m$ .

Para conseguir que el ciclo sea  $m$ , es necesario que se satisfagan las siguientes condiciones:

1.  $b$  y  $m$  tienen que ser primos entre sí.
2.  $a - 1$  tiene que ser múltiplo de  $p$  para cualquier  $p$  primo divisor de  $m$ .
3.  $a - 1$  tiene que ser múltiplo de 4 si  $m$  es múltiplo de 4.

---

## Generación de números pseudo-aleatorios

En la práctica se suele tomar  $b = 0$  para simplificar los cálculos. Si  $b = 0$  entonces, para conseguir que el ciclo sea  $m$ , es necesario que se satisfagan las siguientes condiciones:

1.  $m$  tiene que ser primo.
2.  $a^i - 1$  tiene que ser múltiplo de  $m$  para  $i = m - 1$  pero no para  $i < m - 1$ .

Diversos programas de software soportan la generación de datos uniformes. Habitualmente utilizan,

- $a = 16807, b = 0, m = 2^{31} - 1$ .
- $a = 6303600167, b = 0, m = 2^{31} - 1$ .
- $a = 65539, b = 0, m = 2^{31}$ .

---

## Generación de números pseudo-aleatorios

P.e., para generar números uniformes, Excel utiliza el comando ALEATORIO(), Matlab el comando rand, Java o JavaScript el comando Math.random().

Una vez generados los números pseudo-aleatorios hay que comprobar (aunque no se suele hacer) que se parecen a los realmente aleatorios:

- Hay que comprobar que los datos se distribuyen como una  $U(0, 1)$  mediante contrastes de bondad de ajuste (Kolmogorov-Smirnov,  $\chi^2$ , ...).
- Hay que comprobar que los datos son independientes mediante contrastes de independencia (tests de rachas, basados en autocorrelaciones, ...).

---

## Generación de números pseudo-aleatorios

¿Cómo generar datos que procedan de una distribución distinta a la  $U(0, 1)$ ?

- Software específico.
- Simulación Monte Carlo.

La generación de números no uniformes se obtiene a partir de números uniformes.

En muchas ocasiones es útil el siguiente resultado: Si  $u$  es un número uniforme, entonces  $x = F^{-1}(u)$  se distribuye según la función de distribución  $F$ .

---

## Lenguajes de Simulación

Los estudios de simulación se simplifican con la ayuda de software especializado en lenguajes de simulación.

Entre ellos destacan: SIMULINK (Matlab), GASP (en Fortran), SIMSCRIPT (desarrollado por RAND Corporation), GPSS (por IBM, uno de los más utilizados), SLAM, SIMULA, MODSIM, ...

Para Excel, existen los siguientes *add-in packages* de simulación: @Risk, Crystal Ball, Insight.xla, RiskSim.xla

---

## Aplicaciones: Gestión de beneficios (overbooking) en aerolíneas

⇒ TransAtlantic Airlines: ruta London Heathrow - New York JFK, en Boeing 747.

Puede transportar hasta 500 pasajeros, 400 en economy class y 100 en business class. El precio del billete es de 600 € en economy class y de 1800 € en business class. No hay otras restricciones en la tarifa (p.e. compra avanzada, máxima estancia, noche del sábado incluida, etc.).

- El problema de las aerolíneas con las reservas de plaza se encuentra en las personas que no materializan dichas reservas.

Para cubrirse de este riesgo, esta compañía impone una penalización de 150 € a los pasajeros que anulan o cambian su reserva en economy class y ninguna penalización a los pasajeros en business class.

---

## Gestión de beneficios (overbooking) en aerolíneas

- Además, como el beneficio perdido por pasajero que no se presenta es mucho mayor que el coste por pasajero, las leyes permiten que las aerolíneas puedan realizar overbooking, esto es, ofertar más plazas que la capacidad del avión.

En particular, TransAtlantic Airlines incurre en un gasto de 500 € por pasajero en economy class que tiene que recolocar y de 1000 € por pasajero en business class.

Se estima que dicha ruta tiene una demanda media 500 pasajeros en economy class (distr. normal con desv. típica 100) y que la probabilidad de que un pasajero no se presente es del 5%. En business class, la demanda media es de 150 pasajeros (distr. normal con desv. típica 25) y la probabilidad de que un pasajero no se presente es del 20%.

---

## Gestión de beneficios (overbooking) en aerolíneas

Actualmente, la decisión que toma dicha aerolínea es ofertar 420 plazas en economy class (un 5 % más de la capacidad) y 120 plazas en business class (un 20 % más de la capacidad).

- ¿Pero es esta política la mejor?

Se puede obtener una política óptima realizando una simulación.

↳ Observad los ficheros revenue.html, revenue2.html y revenue.xls.

Con esta simulación se observa que, con la política actual, la compañía obtiene un beneficio medio de unos 405100 €. Pero si la compañía ofertase 424 plazas en economy class y 126 plazas en business class obtendría un beneficio medio de unos 408300 €. La desv. típica del beneficio es de unos 20000 €.