

---

# Investigación Operativa

Ingeniería Informática

Curso 06/07

- Introducción
  - Programación lineal
  - Programación entera
  - Programación combinatoria y en redes
  - Simulación
  - Sistemas de colas
-

---

## Introducción: ¿Qué es la IO?

La IO consiste en el uso de métodos analíticos avanzados que ayudan en la **toma de decisiones** (proceso humano que habitualmente se realiza mediante la intuición). Para que la toma de decisiones sea lo más eficaz posible se requiere una metodología formal.

La IO emplea **modelos matemáticos** para analizar situaciones complejas, que pueden ser de tipo financiero, científico, industrial, etc.

Se pueden tomar mejores decisiones basándose en:

- Análisis exhaustivos de datos
- Consideración de todas las alternativas posibles
- Predicciones precisas de sucesos y estimaciones de riesgo
- Uso de las últimas técnicas y herramientas de decisión

---

## Introducción: ¿Qué es la IO?

Los métodos analíticos que emplea la IO incluyen:

- Optimización: encontrar la mejor decisión posible de entre un conjunto innumerable de alternativas.
- Simulación: *imitación* de la realidad (comportamientos, materiales, ideas, . . . ) que ahorra tiempo y dinero.
- Probabilidad y Estadística: ayuda a resumir/analizar información, medir riesgos, realizar predicciones, etc.

---

## Introducción: ¿Qué es la IO?

Los modelos matemáticos pueden ser tratados/resueltos mediante **algoritmos** computacionales.

En este curso  $IO \simeq$  Modelización + Algoritmos

Los pioneros de la IO moderna fueron los científicos ingleses durante la Segunda Guerra Mundial (IO = Planificación de operaciones militares).

El desarrollo posterior ha ido ligado al de los ordenadores.

---

## Aplicaciones recientes de la IO

- Mediante un *Decision Support System*, Continental Airlines ahorró 40M \$ en 2001 después de los atentados del 11/S, generando decisiones óptimas para reorganizar su flota.
- La compañía Ford, utilizando técnicas IO, optimizó la forma en la que diseñaba y probaba vehículos prototipo, ahorrando 250M \$.
- La compañía UPS usó la IO para rediseñar su red de repartos y así ahorrar 87M \$ entre 2000 y 2002, y otros 189M \$ estimados hasta 2010.
- La cadena NBC usó la IO para mejorar sus estrategias de oferta de espacio publicitario incrementando su beneficio en más de 200M \$.
- La compañía AT&T se ahorró más de 100M \$ a finales de los 90's optimizando la capacidad de restablecimiento de su red de telecomunicaciones tras un fallo en el sistema.
- British Telecom (BT) usa técnicas IO para optimizar la planificación de los 40000 ingenieros/informáticos de su plantilla. Espera ahorrar 250M \$ cada año.

---

## Introducción: Metodología en IO

- **Definición del problema:** descripción de alternativas de decisión, determinación de un objetivo, especificación de restricciones.
- **Formulación del modelo:** traducción a un lenguaje matemático o modelo.
- **Solución del modelo:** lenguajes de modelización, algoritmos de optimización.
- **Validación de la solución:** ¿tiene sentido la solución? ¿es aceptable? ¿se comporta bien?.
- **Puesta en marcha de solución:** traducción de la solución en instrucciones de operación.

Haremos énfasis en la definición del problema, la formulación del modelo y la solución del mismo.

---

## Metodología: Definición y formulación del problema

- Identificar los elementos de decisión: objetivos, alternativas y restricciones.
- Recoger datos.
- Modelar: representación matemática del problema. Los objetivos se suelen modelar mediante funciones, las alternativas mediante variables y las restricciones/limitaciones mediante funciones (de dichas variables).
- Pero en ocasiones no se pueden construir modelos explícitos (elevada complejidad del problema, incertidumbre): modelos de simulación, técnicas heurísticas.

---

## Ejemplo: Problema del transporte

Una empresa dispone de  $n$  centros de producción que fabrican un determinado producto. Este producto debe ser transportado a  $m$  centros de demanda (mercados). Transportar la mercancía de una fábrica a un mercado tiene un determinado precio. Por tanto, ¿cómo se debe transportar la mercancía de forma tal que se minimice el coste total del envío?

### • Definición y formulación del problema

1. objetivo de la empresa? posibles decisiones? restricciones o limitaciones sobre las decisiones?
2. recogida de datos: se dispone de  $i = 1, \dots, n$  plantas de producción y de  $j = 1, \dots, m$  mercados de venta, y se recopila la siguiente información:

$a_i \equiv$  cantidad máxima producida en planta  $i$

$b_j \equiv$  cantidad demandada en mercado  $j$

$c_{ij} \equiv$  coste de transporte unitario desde fábrica  $i$  a mercado  $j$

---

## Ejemplo: Problema del transporte

### 3. Modelización:

- **Variables de decisión** (cantidad a transportar de  $i$  a  $j$ ):  $x_{ij}$ .
- **Objetivo** (minimizar el coste total):
- **Restricciones** (demanda en mercado  $j$ ):

---

## Ejemplo: Problema del transporte

- Restricciones (límite de producción en planta  $i$ ):
  
- Restricciones (límite técnico):

4. Solución del problema: ¿?

---

## Ejemplo: Problema del transporte

- 2 centros de producción y 3 mercados. Se suministran las distancias,  $d_{ij}$ , entre los centros de producción y los mercados (en cientos de Km.):

$d_{ij}$	M1	M2	M3	$a_i$
P1	2.5	1.7	1.8	350
P2	2.5	1.8	1.4	600
$b_j$	325	300	275	

Costes de envío: 90 euros por unidad transportada y 100 Km:

$$c_{ij} = 90d_{ij}.$$

---

## Ejemplo: Problema del transporte

- Modelo:

# Ejemplo: Problema del transporte

Microsoft Excel - transporte.xls

Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana ?

E29

	A	B	C	D	E
1		PROBLEMA DEL TRANSPORTE			
2					
3					
4					
5	<b>Datos</b>	M1	M2	M3	a
6	P1	2.5	1.7	1.8	350
7	P2	2.5	1.8	1.4	600
8	b	325	300	275	
9					
10					
11	<b>Variables de decisión</b>	M1	M2	M3	<b>Restricción a</b>
12	P1	50.00000000000001	300	0	=SUMA(B12:D12)
13	P2	275	0	275	=SUMA(B13:D13)
14	<b>Restricción b</b>	=SUMA(B12:B13)	=SUMA(C12:C13)	=SUMA(D12:D13)	
15					
16	<b>Coste</b>	=90*SUMAPRODUCTO(B6:D7;B12:D13)			
17					
18					
19					
20					
21					
22					
23					
24					
25					
26					
27					
28					

Informe de respuestas 1 / Informe de sensibilidad 1 / Informe de límites 1 / Hoja1 / Hoja2 / Hoja3

NUM DESP

Inicio D... MA... Ban... Wl... Mi... Micr... ewc... Ado...

19:11

# Ejemplo: Problema del transporte

PROBLEMA DEL TRANSPORTE				
<b>Datos</b>	<b>M1</b>	<b>M2</b>	<b>M3</b>	<b>a</b>
<b>P1</b>	2.5	1.7	1.8	350
<b>P2</b>	2.5	1.8	1.4	600
<b>b</b>	325	300	275	
<b>Variables de decisión</b>	<b>M1</b>	<b>M2</b>	<b>M3</b>	<b>Restricción a</b>
<b>P1</b>	50	300	0	350
<b>P2</b>	275	0	275	550
<b>Restricción b</b>	325	300	275	
<b>Coste</b>	153675			

---

## Ejemplo: Problema del transporte

- Costes marginales (o costes reducidos o multiplicadores):

	M1	M2	M3
P1			36
P2		9	

- Comentarios: es óptimo no enviar nada de P1 a M3 pero si insistimos en enviar un artículo se añadirán 36 euros al coste óptimo.

Explicación: si enviamos un artículo de P1 a M3, entonces para mantener el balance producción/demanda debemos enviar una unidad menos de P2 a M3, una más de P2 a M1 y una menos de P1 a M1. El incremento neto en distancias es  $180 - 140 + 250 - 250 = 40$  Km., que cuestan  $0.4 \times 90 = 36$  euros.

---

# Metodología: Tipos de modelos

## Deterministas:

- Programación Matemática:
  - Programación Lineal**,
  - Programación No Lineal,
  - Programación Entera**,
  - Programación Combinatoria**,
  - Programación sobre redes**,
  - Programación Dinámica,
  - Programación Multiobjetivo,
- Teoría de juegos  
etc.

## Probabilísticos:

- Programación estocástica,
- **Teoría de colas**,
- **Simulación**,
- etc.

---

# Programación Matemática

Herramienta de **optimización** utilizada en IO. ¿Por qué es útil?

- La gente optimiza: las compañías aéreas planifican a la tripulación y a sus aviones de forma que minimizan sus costes; los inversores se crean carteras (portfolios) para maximizar su rentabilidad evitando un riesgo elevado; las industrias intentan maximizar la eficiencia en el diseño y operación de sus procesos de producción; etc.
- La naturaleza optimiza: Los sistemas físicos tienden a un estado de mínima energía; los rayos de luz viajan de forma tal que su tiempo de llegada es mínimo; etc.

---

# Programación Matemática

Elementos de un problema de optimización (programa matemático):

- **Objetivo** a optimizar: beneficios, tiempo, energía, costes,...
- **Variables** (incógnitas): horarios de despegue de aviones, cantidad a invertir, decisión a tomar, alternativas, ...
- **Restricciones**: limitaciones a las variables, por ejemplo, los horarios de despegue de los aviones están restringidos por cuestiones de seguridad aérea. Las cantidades a invertir en un fondo de inversión se deben diversificar.

Una vez formulado el problema se resuelve mediante un algoritmo de optimización. Existen distintos algoritmos en función del tipo de problema que se trate de resolver.

---

## Programación Matemática: continua o entera

- Si las variables del problema son continuas se denomina problema de **programación continua**.
- Si las variables del problema son enteras se denomina problema de **programación entera**.
- Si las variables del problema son mezcla de continuas y enteras se denomina problema de **programación entera mixta**.

Un problema continuo tiene un número infinito (no numerable) de posibles soluciones mientras que un problema entero tiene un número finito (numerable) de posibles soluciones.

Pero resulta que, generalmente, un problema continuo es más fácil de resolver que uno entero (la suavidad de las funciones ayuda a inferir el comportamiento de las mismas cerca del óptimo).

---

## Programación Matemática: global o local

- **Solución local:** no se puede mejorar en una vecindad de la solución.
- **Solución global:** la mejor de todas las soluciones locales.

Lo ideal es encontrar una solución global, pero generalmente no es posible encontrarla en un periodo razonable de tiempo. Dos alternativas:

- conformarnos con una solución local rápida.
- intentar buscar una solución global con heurísticos (o con algoritmos deterministas si la dimensión del problema es moderada).