

# Ejercicios de Flujos en Redes y Optimización Combinatoria

Investigación Operativa  
Ingeniería Informática, UC3M

Curso 06/07

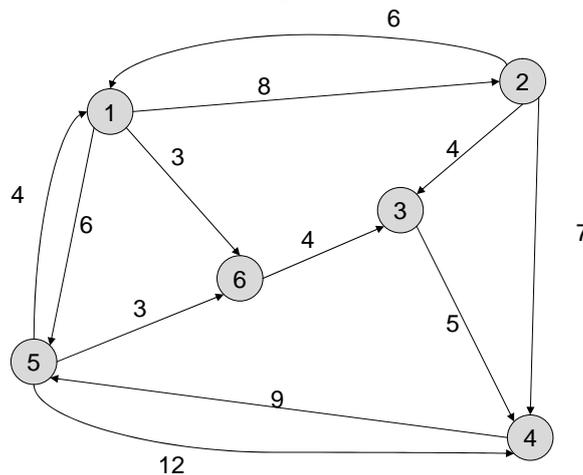
1. Una compañía logística quiere transportar madera desde 3 centros forestales a 5 centros de demanda. Los costes de transporte (en euros) se muestran en la siguiente tabla junto con la producción y demanda en cada centro:

	D1	D2	D3	D4	D5	Producción
F1	100	200	400	350	150	30
F2	350	300	600	700	500	20
F3	300	200	450	300	200	28
Demanda	10	20	16	20	7	

- ¿Qué problema de programación lineal da el óptimo (mínimo coste total de transporte) de este problema?

2. En la red de la Figura 1, encuentra el camino más corto desde el nodo 2 al resto de nodos.

Figura 1:



3. En la red de la figura 2, encuentra el camino más corto desde el nodo S al nodo T.
4. En la red de la figura 3, encuentra el camino más corto desde el nodo 1 al nodo 12.
5. Una empresa se dedica al tratamiento de documentos bancarios. El proceso que sigue un documento cuando se recibe en la empresa es: lectura por escáner (OCR) y grabación en un disco óptimo. Para realizar cada una de estas operaciones, la empresa dispone de varios equipos:

Figura 2:

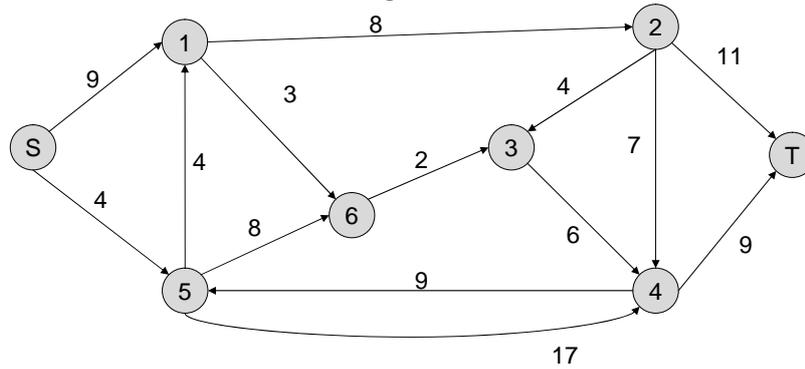
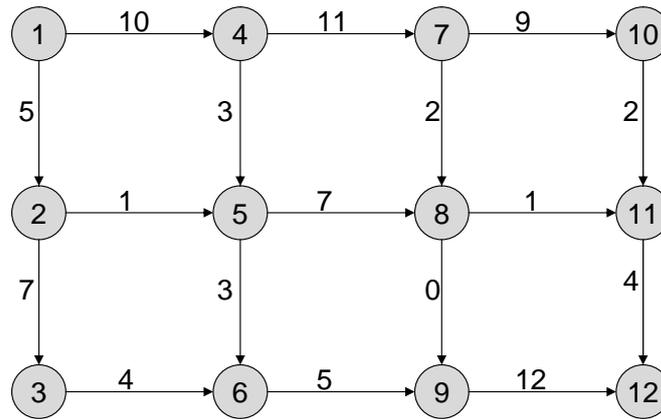


Figura 3:



**OCR** La empresa dispone de dos OCRs distintos, el primero tarda 10 milisegundos en leer un documento y el segundo, de mayor calidad, es capaz de leer un documento en 8 milisegundos.

**Grabadoras** Tres grabadoras G1, G2 y G3, que graban un documento a una velocidad de 7,8 y 10 milisegundos por documento, respectivamente.

Cada uno de los aparatos anteriores se han ido comprando en distintos momentos y, por tanto, sus especificaciones no son siempre compatibles. Por ello, ha sido necesario instalar una interface a la salida de cada OCR que permita transmitir un documento desde el OCR hasta las grabadoras. La siguiente tabla muestra cuáles son los tiempo de transmisión entre el OCR y las grabadoras (en milisegundos):

	G1	G2	G3
OCR1	4	1	2
OCR2	5	2	2

Si atendemos al criterio de tiempo de tratamiento de un documento, ¿Qué OCR y qué grabadora deben seleccionarse para que el tiempo de proceso de un documento sea el menor posible?

- Escribe un modelo de programación matemática que permita tomar esta decisión.
- Formula este problema como un problema de caminos mínimos.

Supongamos que en caso anterior no se considera el tiempo de proceso y el objetivo pasa a ser procesar el mayor número de documentos. Se sabe que el número de documentos que se pueden procesar en cada dispositivo es el siguiente:

OCR	número de documentos	INTERFACE	número de documentos	GRABADORAS	número de documentos
1	300	1	400	1	200
2	350	2	300	2	200
				3	300

Nota: El INTERFACE 1 está conectado al OCR 1 y el INTERFACE 2 lo está al 2.

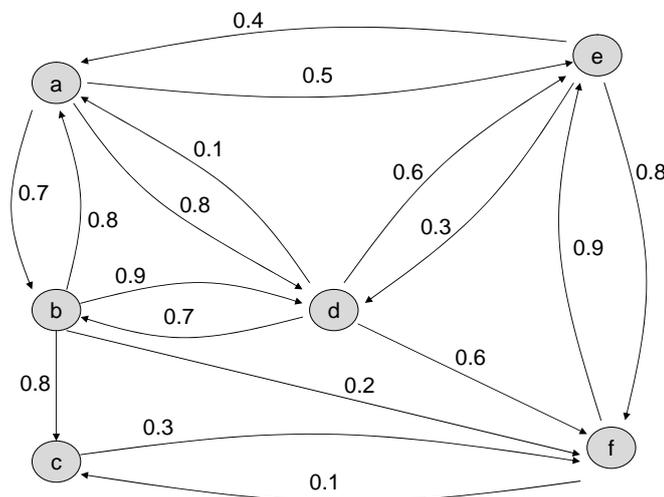
Además desde cada INTERFACE a cada grabadora sólo es posible enviar 200 documentos.

- Determinar el número máximo de trabajos que pueden procesarse. ¿Qué modelo matemático debe utilizarse para obtener la solución?
- Si se pudiese ampliar la capacidad de algún dispositivo del sistema, en cuál o cuáles deberíamos centrar los esfuerzos. Justificar matemáticamente la respuesta.

6. Uno de los mayores problemas que se plantea en internet es decidir por donde enviar los ficheros que reciben los distintos servidores. Una visión miope o local del asunto podría llevar a que cada router enviase los mensajes por la conexión que tenga menos congestionada en cada momento. Esto nos puede llevar a retrasar los envíos. Otra posibilidad es que cada router tenga definida una tabla, de forma que cada vez que le llegue un fichero con un destino determinado sepa por qué línea tiene que enviar dicho fichero.

En la práctica, existen diversas alternativas para construir esta tabla. Una de las primeras y más extendidas consiste en lo siguiente. Cada cierto tiempo (pocos minutos) cada enrutador envía al resto de los servidores información sobre la saturación de las conexiones que salen de ese servidor (se informa sobre el nivel de ocupación de cada línea en %). Con toda esta información se resuelve el problema de encontrar el camino de distancia mínima entre cualquier par de enrutadores, donde la distancia de un camino se define como la suma de la saturación de todas las líneas que lo forman. Con esta solución se crea una tabla para cada enrutador con dos entradas: “destino final” y “siguiente enrutador en el camino óptimo”. De esta forma, cuando a un enrutador le llega un nuevo fichero, consulta en la tabla cuál es el siguiente enrutador que le corresponde según el destino final del fichero.

Supongamos que tenemos una red con los siguientes enrutadores (nodos), conectados entre sí según se muestra en la figura:



La etiqueta asignada a cada arco representa el nivel de saturación (en tanto por uno).

Construye la tabla de enrutamiento del nodo  $a$  de acuerdo con el esquema expuesto anteriormente.

¿por qué no tenemos en cuenta de dónde ha salido el fichero para determinar cuál es el siguiente enrutador que le corresponde?, ¿por qué sólo tenemos en cuenta cuál es su destino final?

7. En la oficina de telégrafos de la ciudad I hay 126 telegramas urgentes de igual duración en cuanto a su transmisión destinados a la localidad Z, donde son recibidos en tres centrales, G, H y J. Cada una de estas centrales puede recibir (simultáneamente) 28, 19 y 17 telegramas, respectivamente.

La transmisión de los telegramas se realiza a base de conexiones con centrales de otras ciudades. Dependiendo de las características de cada una de estas conexiones las posibilidades de enviar varios mensajes simultáneamente a través de ellas cambian. En la tabla siguiente se recogen las distintas posibilidades (una casilla en blanco indica la imposibilidad de transmisión a los efectos que nos interesan):

Orígenes	Destinos							
	A	B	C	D	E	G	H	J
I	30	18	19					
A		9		7		16		
B			10	12				
C					16		8	
D					8	12		10
E							11	7

Si la duración de la transmisión de un telegrama es de 77 segundos, independientemente de las conexiones realizadas para ello, ¿cómo determinarías cuánto tiempo se tardaría en transmitir los 126 mensajes?

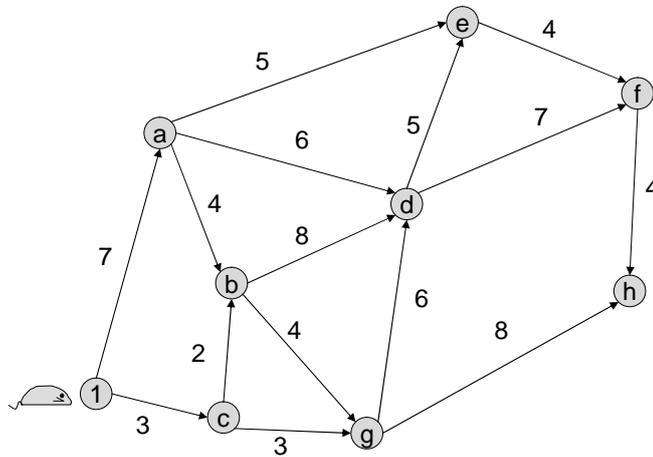
Sin obtener la solución óptima del problema, ¿podrías dar una cota inferior para el tiempo mínimo necesario para completar la transmisión de los 126 mensajes?

8. Una compañía de reforestación sembrará árboles en ocho zonas en la misma área. Para esto debe desarrollar un sistema de caminos de tierra para tener acceso a cualquier zona desde cualquier otra. La distancia entre cada par de zonas viene dada en la siguiente tabla:

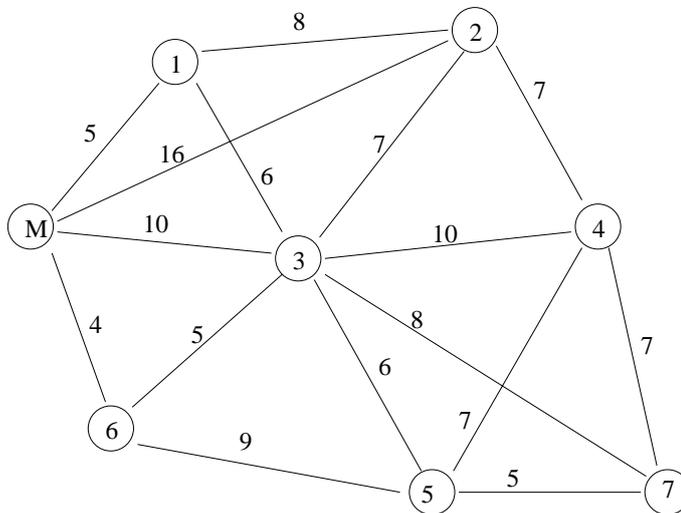
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-	13	21	9	7	18	20	15
2		-	9	18	12	26	23	11
3			-	26	17	25	19	10
4				-	7	16	15	9
5					-	9	11	8
6						-	6	10
7							-	5
8								-

¿Entre qué pares de zonas deben construirse caminos para conectarlas todas con una longitud total mínima de caminos?

9. El siguiente grafo muestra un complejo de túneles, y los números que están al lado de los arcos representan las longitudes de los túneles. Queremos dejar una porción de queso en algún nodo de la red de manera que el ratón que se encuentra en el nodo 1 tarde lo máximo posible a encontrarlo, teniendo en cuenta que es un excelente rastreador.



10. La mayoría de los vecinos de un cierto municipio trabaja en alguno de los siete pozos que una compañía minera explota cerca del municipio. El municipio, los pozos y las vías que los conectan están descritos en el gráfico siguiente:



Antes de las elecciones el actual alcalde prometió a todos los vecinos que pavimentaría algunos caminos de forma que cada trabajador tuviera pavimentado el camino más corto desde el municipio hasta su mina. ¿ Cuántos kilómetros se habría ahorrado pavimentar si sólo hubiera prometido que cada trabajador tendría un camino pavimentado para acceder a su mina?

11. Describe el problema del viajante de comercio como un problema de optimización combinatoria
12. Un grangero viaja con un lobo, un cordero y una caja de coles. En un punto de su viaje, debe cruzar el río, pero la barca de qué dispone no soporta más peso que el del grangero y un animal, o el grangero

y la caja. El grangero debe decidir cómo cruzar a los animales y las coles al otro lado del río, sin dejar en ningún momento solos al lobo con el cordero ni al cordero con las coles.

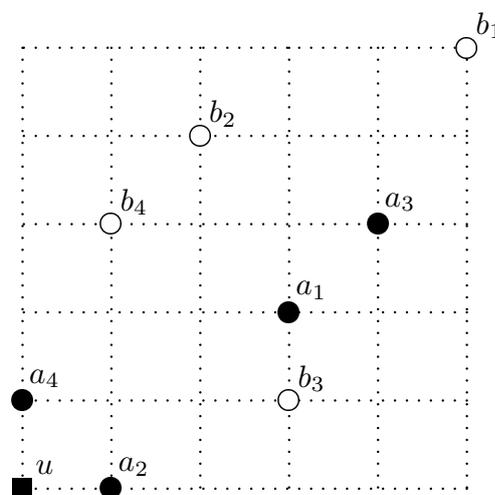
Representa este problema como el problema de encontrar el camino más corto entre dos nodos de una red.

13. Una empresa dedicada a la producción de carrocerías tiene un único túnel de pintura para todas las carrocerías que fabrica. En este momento, se están fabricando carrocerías negras, rojas, amarillas, azules y blancas. Cada vez que se cambia de color, la producción debe pararse para limpiar el equipo, y evitar que las pinturas se mezclen. El tiempo necesario para esta operación depende de los colores entre los que se pretende cambiar, ya que unos son más sensibles que otros (p. e. hay que limpiar mejor cuando se pasa de un color oscuro a un color claro) Por esto, la empresa pinta juntos todos los coches del mismo color. En estos momentos, debe decidir qué secuencia de colores utilizar para minimizar el tiempo total perdido en limpieza del equipo. Por política de la empresa, todos los días debe mantenerse el mismo patrón, de manera que al final del día, las máquinas deben dejarse a punto para empezar al día siguiente con el primer color. En la tabla siguiente, están los tiempos de limpieza del equipo para cada transición entre colores:

de/a	negro	rojo	amarillo	azul	blanco
negro	0	3	5	2	7
rojo	1	0	4	3	5
amarillo	3	4	0	4	2
azul	1	3	4	0	5
blanco	2	2	1	2	0

Indica cómo se puede encontrar la secuencia óptima de colores.

14. La siguiente figura representa algunas calles de una ciudad. En cada una de las esquinas marcadas con una “a” hay un cliente que desea ser transportado a la esquina marcada con “b” correspondiente; es decir, el cliente situado en la esquina  $a_1$  quiere ir a la esquina  $b_1$ , y así sucesivamente.



Un taxista que está situado en el punto marcado con  $u$ , desea hacer todos los servicios y regresar al punto de partida, y quiere atender a los clientes en el orden que le suponga el recorrido más corto

(todas las manzanas tienen la misma longitud, que tomaremos como unidad). Por supuesto, no pueden coincidir dos clientes en el interior del taxi.

- Escribe un modelo de programación entera para ayudar al taxista a encontrar la mejor ruta. (No es necesario que calcules los coeficientes de todas las variables)
- ¿Serías capaz de transformar este problema en un problema del viajante de comercio asimétrico?