

# Ejercicios de Programación Entera

Investigación Operativa  
Ingeniería Informática, UC3M

Curso 06/07

1. En una ciudad se intenta disminuir la contaminación reduciendo la circulación interurbana. Un primer estudio busca determinar el mínimo número de autobuses que satisfagan la necesidades de transporte. Después de recoger la información se observa que este número varía según la hora del día, pero se puede considerar constante en intervalos sucesivos de cuatro horas:

12:00 a.m. – 4:00 a.m.	4 autobuses	12:00 p.m. – 4:00 p.m.	7 autobuses
4:00 a.m. – 8:00 a.m.	8 autobuses	4:00 p.m. – 8:00 p.m.	12 autobuses
8:00 a.m. – 12:00 p.m.	10 autobuses	8:00 p.m. – 12:00 a.m.	4 autobuses

Los turnos de autobuses funcionan durante ocho horas seguidas y pueden comenzar al principio de cualquiera de los seis periodos descritos anteriormente. Además, si en el turno que comienza a las 8:00 p.m. hay más de 4 autobuses, en el siguiente ha de haber también más de 4. Plantear un problema de programación lineal entera para determinar el mínimo número de autobuses diario que satisface las necesidades anteriores.

2. Una empresa fabrica tres productos 1, 2 y 3, que deben procesarse en dos tipos de maquinaria denominadas A y B. En la siguiente tabla se recogen los tiempos de procesamiento (por tonelada procesada) con cada máquina, los beneficios (por tonelada procesada) en euros, y la disponibilidad de cada tipo de maquinaria (en horas por semana):

Tipo de maquinaria	Productos			Disponibilidad (horas)
	1	2	3	
A	2	5	4	70
B	3	4	6	86
Benef./ton. (euros)	800	700	950	

La empresa considera aumentar la disponibilidad de tiempo de procesamiento de la maquinaria. Para ello, puede llevar a cabo alguna de las posibilidades indicadas a continuación

Tipo de maquinaria	A		B	
Incremento de disp. (horas)	10	15	8	12
Coste inversión (euros)	1600	1700	1700	1750

A lo sumo, se puede realizar un tipo de incremento para cada máquina. Gracias a un estudio de mercado se conocen los límites de demanda de los productos, que son

Producto	Demanda (ton.)	
	mínima	máxima
1	6	17
2	3	8
3	7	20

Además, la inversión total no puede exceder de 3400000 euros. Se pide:

- Formular el problema que se debe plantear la dirección de la empresa para obtener el plan de procesamiento e inversión de mayor beneficio.
- Si la empresa deseara aumentar la disponibilidad de un sólo tipo de maquinaria, ¿cómo se modifica el modelo anterior reflejando tal situación?
- Si no se quiere añadir disponibilidad de B a menos que se añada de A, ¿cómo se representa esta nueva condición?
- La empresa desea ampliar la disponibilidad con la maquinaria B si, y sólo si, se incrementa también la A. ¿Cómo debe modificarse la condición considerada en el apartado anterior?

3. Dado el problema entero

$$\begin{aligned}
 \text{mín}_x \quad & x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\
 \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 4 \\
 & 2x_1 - x_2 - x_3 \geq 3 \\
 & x \geq 0 \text{ enteras,}
 \end{aligned}$$

- Comprueba que la solución del problema relajado es:  $\left( 7/3 \ 5/3 \ 0 \right)^T$ .
- Indica el siguiente subproblema que elegirías para resolver por el método de “branch and bound.”
- Calcula la solución de dicho subproblema y comenta qué subproblemas introducirías para continuar el proceso de solución.

4. Resuelve, aplicando el método de “branch and bound”, el siguiente problema entero:

$$\begin{aligned}
 \text{máx} \quad & 4x_1 + 5x_2 + x_3 \\
 \text{s.a} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
 & x_1 + 4x_2 \leq 11 \\
 & 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13 \\
 & x \geq 0, \text{ enteras.}
 \end{aligned}$$

5. Resuelve por el método de Branch and Bound el siguiente problema de programación entera:

$$\begin{aligned}
 \text{minimizar} \quad & -x_1 - x_2 \\
 \text{sujeto a} \quad & -x_1 \leq 0 \\
 & 2x_1 - 2x_2 \leq 1 \\
 & 2x_2 \leq 9 \\
 & x_1, x_2 \in \{0, 1, 2, \dots\}
 \end{aligned}$$

6. En una central hidroeléctrica debe decidirse qué turbinas se pondrán en marcha durante el día de manera que se satisfaga la demanda (estimada) de la población a la que se sirve:

12 p.m. a 6 a.m.	15.000 MW
6 a.m. a 9 a.m.	30.000 MW
9 a.m. a 3 p.m.	25.000 MW
3 p.m. a 6 p.m.	40.000 MW
6 p.m. a 12 p.m.	27.000 MW

La central dispone de turbinas de 3 tipos distintos. Concretamente, dispone de 12 de tipo 1, 10 de tipo 2 y 5 de tipo 3. Cada turbina tiene que funcionar entre unos niveles mínimo y máximo. Los costes de funcionamiento dependen del nivel al que la turbina esté operando: hay un coste por hora que la turbina opera a nivel mínimo y un coste extra, también por hora, por cada megawatio que la turbina opera sobre el nivel mínimo. Además, la puesta en marcha de una turbina conlleva un coste:

	Nivel mínimo	Nivel máximo	Coste por hora al mínimo	Coste/hora por MW por encima del mín.	coste puesta en marcha
Tipo 1	850 MW	2.000 MW	1.000	2	2.000
Tipo 2	1.250 MW	1.750 MW	2.600	1'30	1.000
Tipo 3	1.500 MW	4.000 MW	3.000	3	500

Además, para cumplir con los requisitos de calidad establecidos en el contrato, tiene que haber suficientes generadores funcionando en cualquier periodo del día como para responder a un incremento de la demanda estimada de hasta un 15 %. El posible incremento debe poder ser atendido ajustando, siempre dentro de los límites de operación, la producción de las turbinas que están en funcionamiento.

Al final del ciclo de 24 horas hay una desconexión breve antes de comenzar la aplicación de la siguiente planificación; no obstante, durante el día, una vez que una turbina se ha puesto en marcha ya no se desconecta hasta el final del ciclo.

- ¿Qué turbinas deben estar funcionando y en qué periodos del día deben hacerlo para minimizar el coste total?
- ¿Cuál es el coste marginal de producción de electricidad en cada periodo del día?, es decir, ¿qué tarifas se deberían cobrar?
- ¿Qué ahorro se produciría si se rebajara el 15 % de reserva de energía que se debe garantizar?, es decir, ¿cuánto cuesta este nivel de garantía de servicio?
- ¿Cómo cambiaría el modelo si no se produce la desconexión al final del día? Compara las soluciones obtenidas con los dos modelos