Ejercicios de Programación Lineal

Investigación Operativa
Ingeniería Informática, UC3M

Curso 06/07

1. Una compañía de transporte dispone de 10 camiones con capacidad de 40000 libras y de 5 camiones con capacidad de 30000 libras. Los camiones grandes tienen un coste de transporte de 30 céntimos/milla, y los pequeños de 25 céntimos/milla. En una semana la compañía debe transportar 400000 libras en un recorrido de 800 millas. La posibilidad de otros compromisos recomienda que por cada dos camiones pequeños mantenidos en reserva debe quedarse por lo menos uno de los grandes.

   ¿Cuál es el número de camiones de ambas clases que debe movilizarse para ese transporte de forma óptima y teniendo en cuenta las restricciones?

2. Se pide que formules el siguiente problema de programación lineal: Tienes 2200 euros disponibles para invertirlos durante los próximos cinco años. Al inicio de cada año puedes invertir parte del dinero en depósitos a un año o a dos años. Los depósitos a un año pagan un interés del 5 %, mientras que los depósitos a dos años pagan un 11 % al final de los dos años. Además, al inicio del segundo año es posible invertir dinero en obligaciones a tres años de la empresa X., que tienen un rendimiento (total) del 17 %. Plantea el problema lineal correspondiente a conseguir que al cabo de los cinco años tu capital sea lo mayor posible.

3. Una compañía quiere construir un gran dique en un área lejana. Para su construcción necesita mezclar el hormigón en el lugar de construcción del dique, pero dicho hormigón se tiene que producir en cuatro lugares lejanos al del dique. El hormigón se produce a partir de la mezcla de distintos materiales (grava, arena, etc.). La siguiente tabla muestra las cantidades máximas disponibles para cada material y los costes de transporte de cada origen de producción del material al área del dique.

Tipo de material	Cantidad disponible (m^3)	Coste de transporte (€$/m^3$)
A	8000	5.2
B	16000	7.5
C	9000	3.9
D	6000	5.1

   Para la construcción del dique se requieren 2 tipos de hormigón que se producirán con distintas mezclas de los cuatro materiales. A continuación se muestran los requisitos de las 2 mezclas:

   - Mezcla 1: como mucho puede contener un 50 % de ingredientes de A y B a la vez; al menos tiene que contener un 10 % de ingredientes de C; Los ingredientes de A, B, C y D deben suponer al menos el 98 % de la mezcla.

- Mezcla 2: el ingrediente A debe estar presente en al menos el 20 % de la mezcla; C y D deben suponer al menos la mitad de A y B; Los ingredientes de A, B, C y D deben suponer al menos el 99 % de la mezcla.

La siguiente tabla muestra los costes de cada mezcla y las cantidades mínimas requeridas.

Tipo de hormigón	Coste de la mezcla (€/m^3)	Cantidad mínima necesitada (m^3)
Mezcla 1	5.7	9000
Mezcla 2	6.3	15000

El objetivo de la compañía es producir la cantidad necesaria de hormigón con el menor coste posible.

Formula, pero no resuelvas, un problema de programación lineal apropiado para que la compañía tome una decisión. Explica claramente el significado de cada variable que introduzcas en la formulación.

4. Una factoría frabrica dos tipos de productos, A y B. Para su elaboración se requieren dos máquinas, M1 y M2. El artículo A necesita 2 horas de trabajo de la máquina M1 y 1.5 horas de la máquina M2. El artículo B, 1.5 horas, y 1 hora, respectivamente. Cada máquina está funcionando, a lo sumo, 40 horas semanales. Por cada unidad del artículo A se obtiene un beneficio de 250€, mientras que por cada unidad del artículo B es de 150€. ¿Cuántas unidades de A y cuántas de B deben fabircarse semanalmente para obtener un beneficio máximo?

5. La producción anual de una fábrica de cemento es de dos millones y medio de contenedores. La fábrica dispone de colectores mecánicos para controlar la contaminación del aire pero, pese a ello, por la fabricación de cada contenedor se emiten dos unidades de contaminación al aire. Por esta razón, se propone a la industria que remplace sus colectores por precipitadores electrostáticos, que pueden ser de dos tipos; el tipo A reduce la emisión de partículas contaminantes a la cuarta parte, y el tipo B a la décima parte. Los costes asociados al funcionamiento de los precipitadores son de 0.14€ por contenedor, para el tipo A y de 0.18€ por contenedor para el tipo B. Si la contaminación debe reducirse en 4200000 unidades, ¿Cuántos contenedores de cemento deben seguir tratamiento anticontaminante en cada tipo de precipitador para que el coste de la operación sea el menor posible?

6. Dado el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & 3x_1 - x_3 = 5 \\ & x_2 - x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

   a) Obtén una solución básica factible (vértice).

   b) Calcula el valor de la función objetivo para dicha solución.

   c) ¿Es el punto $(1335, 4001, 4000)$ la solución del problema? ¿Es mejor que el punto del apartado anterior?

7. Transforma a la forma estándar el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & 4 \leq 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 20 \\ & 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 3. \end{aligned}$$

8. Dado el problema lineal

$$\begin{array}{cc} \text{máx}_x & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & -x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ & x \geq 0, \end{array}$$

justifica que el punto $x_0 = (2 \quad 2 \quad 0)^T$ es un vértice factible. Calcula la solución del problema aplicando el método Simplex.

9. Resuelve con el método simplex el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & x_1 - x_3 + x_4 \\ \text{sujeto a} \quad & -2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

10. Resuelve el siguiente problema lineal mediante el algoritmo simplex:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & x_1 + x_2 - 3x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & 3x_1 - x_3 = 5 \\ & x_2 - x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

11. Para el problema lineal

$$\begin{array}{cc} \text{máx}_x & x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \leq -3 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ & x \geq 0. \end{array}$$

se pide que determines si el problema es factible. Si lo es, indica un vértice factible del mismo, y si no lo es propón alguna modificación del lado derecho de las restricciones para la que el problema correspondiente sí sea factible.

12. Nos dan el problema lineal

$$\begin{array}{cc} \text{mín}_x & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.a} & 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 + x_3 \geq 1 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ & x \geq 0. \end{array}$$

y el punto $x = (2 \quad 1 \quad 0)^T$. Se pide que:

a) Justifiques que el punto anterior es un vértice.

b) Encuentres el vértice solución.

c) Determines todos los vértices adyacentes al vértice solución.

d) ¿Tiene más de una solución el problema? Indica todas las soluciones que puedas.

13. Comprueba que el problema lineal

$$\begin{array}{rc} \text{mín}_x & x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 \\ \text{s.a} & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 \geq -2 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 \geq 0 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

no está acotado. Si te sirve de ayuda, puedes comenzar en el vértice $x = (1\ 0\ 2\ 1\ 0)^T$. ¿Cuáles de las siguientes restricciones hacen que el problema esté acotado?

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 & \leq & 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 & \leq & 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 & \leq & 8 \end{array}$$

¿Por qué?

14. Resuelve por el método de las dos fases el siguiente problema lineal:

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & x_1 - x_3 + x_4 \\ \text{sujeto a} & -2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{array}$$

15. Demuestra que, para el algoritmo simplex, si el nuevo vértice se define como $x^+ = x + \alpha p$, entonces

$$c^T x^+ \leq c^T x.$$

16. Justifica, a partir del ejercicio anterior, que el método simplex finaliza en un número finito de iteraciones, siempre que el problema lineal sea no degenerado y acotado.

17. Resuelve el siguiente problema de programación lineal mediante la versión primal-dual del algoritmo de punto interior y empezando en el siguiente punto factible:

$$x = (1335,\ 4001,\ 4000)^T, \quad \lambda = (0{,}1\ ,\ 0{,}95)^T, \quad \sigma = (0{,}7,\ 0{,}05,\ 0{,}05)^T.$$

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & 3x_1 - x_3 = 5 \\ & x_2 - x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

18. Resuelve el siguiente problema de programación lineal mediante la versión primal-dual del algoritmo de punto interior y empezando en el siguiente punto infactible:

$$x = (1, 1, 1, 1, 1)^T, \quad \lambda = (0, 0, 0)^T, \quad \sigma = (1, 1, 1, 1, 1)^T.$$

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & -x_1 - 2x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \\ & x_1 + 2x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$