

Ejercicios de Teoría de Colas

Investigación Operativa
Ingeniería Informática, UC3M

Curso 06/07

1. Demuestra que en una cola $M/M/1$ se tiene:

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

Solución.

$$\begin{aligned} L &= \sum_{n=0}^{\infty} np_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n(1 - \rho) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n - \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \\ &= \rho \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \\ &= \frac{\rho}{1 - \rho}. \end{aligned}$$

2. Demuestra que en una cola $M/M/1$ se tiene:

$$L_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho}.$$

Solución.

$$L_q = \lambda W_q = \lambda \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}.$$

3. En un servidor de la universidad se mandan programas de ordenador para ser ejecutados. Los programas llegan al servidor con una tasa de 10 por minuto. El tiempo medio de ejecución de cada programa es de 5 segundos y tanto los tiempos entre llegadas como los tiempos de ejecución se distribuyen exponencialmente.

- a) ¿Qué proporción de tiempo está el servidor desocupado?

- b) ¿Cuál es el tiempo esperado total de salida de un programa?
- c) ¿Cuál es el número medio de programas esperando en la cola del sistema?

Solución. El sistema es $M/M/1$ con $\lambda = 10$ trabajos por minuto y $\mu = 12$ trabajos por minuto. Se asumirá que el sistema es abierto y que la capacidad es infinita. Como $\rho = 10/12 < 1$, el sistema alcanzará el estado estacionario y se pueden usar las fórmulas obtenidas en clase.

- a) El servidor estará desocupado $1 - 5/6 = 1/6$ del total, esto es, 10 segundos cada minuto (ya que el ordenador está ocupado $5 \times 10 = 50$ segundos por minuto).
- b) Tiempo medio total es $W = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{12(1-5/6)} = 1/2$ minuto por programa.
- c) El número medio de programas esperando en la cola es $L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = 4.16$ trabajos.

4. La ventanilla de un banco realiza las transacciones en un tiempo medio de 2 minutos. los clientes llegan con una tasa media de 20 clientes a la hora. Si se supone que las llegadas siguen un proceso de Poisson y el tiempo de servicio es exponencial, determina

- a) El porcentaje de tiempo en el que el cajero está desocupado.
- b) El tiempo medio de estancia de los clientes en la cola.
- c) La fracción de clientes que deben esperar en la cola.

Solución. Sistema $M/M/1$ con $\lambda = 20$ y $\mu = 30$.

- a) $P(\text{cajero ocioso}) = p_0 = 1 - \rho = 1/3$. El 33 % de tiempo el cajero está ocioso.
- b) $W_q = 1/15 = 4$ minutos.
- c) $L = 2$, $L_q = 4/3$, por tanto la fracción de clientes que deben esperar en la cola es $L_q/L = 2/3 \equiv 66.6\%$.

5. Una tienda de alimentación es atendida por una persona. Aparentemente el patrón de llegadas de clientes durante los sábados se comporta siguiendo un proceso de Poisson con una tasa de llegadas de 10 personas por hora. A los clientes se les atiende siguiendo un orden tipo FIFO y debido al prestigio de la tienda, una vez que llegan están dispuestos a esperar el servicio. Se estima que el tiempo que se tarda en atender a un cliente se distribuye exponencialmente, con un tiempo medio de 4 minutos. Determina:

- a) La probabilidad de que haya línea de espera.
- b) La longitud media de la línea de espera.
- c) El tiempo medio que un cliente permanece en cola.

Solución. Sistema $M/M/1$ con $\lambda = 10$ y $\mu = 15$.

- a) $P(\text{línea de espera}) = 1 - p_0 - p_1 = 4/9$.
- b) $L_q = 4/3$ personas en cola.
- c) $W_q = 2/15$ horas = 8 minutos de media en cola.

6. En una fábrica existe una oficina de la Seguridad Social a la que los obreros tienen acceso durante las horas de trabajo. El jefe de personal, que ha observado la afluencia de obreros a la ventanilla, ha solicitado que se haga un estudio relativo al funcionamiento de este servicio. Se designa a un especialista para que determine el tiempo medio de espera de los obreros en la cola y la duración media de la conversación que cada uno mantiene con el empleado de la ventanilla. Este analista llega a la conclusión de que durante la primera y la última media hora de la jornada la afluencia es muy reducida y fluctuante, pero que durante el resto de la jornada el fenómeno se puede considerar estacionario. Del análisis de 100 periodos de 5 minutos, sucesivos o no, pero situados en la fase estacionaria, se dedujo que el número medio de obreros que acudían a la ventanilla era de 1.25 por periodo y que el tiempo entre llegadas seguía una distribución exponencial. Un estudio similar sobre la duración de las conversaciones, llevó a la conclusión de que se distribuían exponencialmente con duración media de 3.33 minutos. Determina:
- Número medio de obreros en cola.
 - Tiempo medio de espera en la cola.
 - Compara el tiempo perdido por los obreros con el tiempo perdido por el oficinista. Calcula el coste para la empresa, sin una hora de inactividad del oficinista vale 250 euros y una hora del obrero 400 euros. ¿Sería rentable poner otra ventanilla?

Solución. Sistema $M/M/1$ con $\lambda = 0.25$ y $\mu = 0.3$.

- $L_q = 4.166$ obreros.
- $W_q = 16.66$ minutos.
- Durante cada hora hay, en media, $L_q = 4.166$ clientes haciendo cola. Es decir, el coste horario por obreros ociosos es de $4.166 \times 400 = 1666.66$ euro. Por otro lado, $1 - \rho = 0.166$, de forma que el coste del tiempo que el oficinista está ocioso es de $250 \times 0.166 = 41.5$ euros horarios, que es mucho inferior.

Si se pusiera otra ventanilla, el sistema sería $M/M/2$. En ese caso, $p_0 = 0.411$ y $p_1 = 0.34$, de forma que el tiempo de oficinista que se perdería cada hora sería, en media, $2p_0 + p_1 = 1.166$ horas. Lo que supone un coste de 291.5 euros cada hora. Por otro lado, cada hora habría, en media, $L_q = 1.01$ obreros en la cola. De forma que el tiempo perdido por los obreros tendría un coste de $400 \times 1.01 = 404$ euros la hora.

La suma de los dos costes es mucho menor en este segundo caso, de forma que sí sería rentable poner otra ventanilla.

7. Una entidad bancaria considera la posibilidad de instalar una red de cajeros en una de sus oficinas. Dado que se desconoce la afluencia de público que va a demandar dicho servicio, coloca un único cajero durante un mes. Diariamente se recogen datos sobre los tiempos de llegadas de los clientes, así como de los tiempos de servicio. Suponiendo que la sucursal se encuentra emplazada en un barrio donde no existe otro servicio semejante, el cliente que llega prefiere esperar a poder utilizar el cajero, cuando éste esté ocupado.

Tras el oportuno análisis de los datos recogidos, se estima que: (i) las llegadas siguen un proceso de Poisson; (ii) la distribución del tiempo de servicio es exponencial; (iii) el tiempo medio transcurrido

entre dos llegadas consecutivas es de 7.5 minutos; (iv) el tiempo medio de servicio es de 5 minutos por cliente.

Calcula:

- a) Tiempo medio de espera que debe sufrir cada cliente en cola.
- b) Tamaño medio de la cola y probabilidad de que al acudir al cajero ya haya alguna persona en la cola.

Solución. Sistema $M/M/1$ con $\lambda = 1/7.5$ y $\mu = 1/5$.

- a) $W_q = 10$ minutos.
- b) El número medio de las colas es de $L_q = 1.33$ personas, y la probabilidad de que haya al menos dos personas en el sistema es de $1 - p_0 - p_1 = 4/9$.

8. Los trabajadores de una fábrica tienen que llevar su trabajo al departamento de control de calidad antes de que el producto llegue al final del proceso de producción. Hay un gran número de empleados y las llegadas son aproximadamente de 20 por hora, siguiendo un proceso de Poisson. El tiempo para inspeccionar una pieza sigue una distribución exponencial de media 4 minutos. Calcula el número medio de trabajadores en el control de calidad si hay:

- a) 2 inspectores.
- b) 3 inspectores.

Solución.

- a) Sistema $M/M/2$ con $\lambda = 20$ y $\mu = 15$. Entonces $L = 2.4$ empleados.
- b) Sistema $M/M/3$ con $\lambda = 20$ y $\mu = 15$. Entonces $L = 1.87$ empleados.

9. Un avión tarda unos 4 minutos de media en aterrizar a partir del momento en que la torre de control le da la señal de aterrizaje. Si las llegadas de los aviones se producen por término medio, a razón de 8 por hora y siguiendo un proceso de Poisson, ¿cuánto va a esperar el piloto dando vueltas al aeropuerto antes de recibir la señal de tierra?

Solución. Sistema $M/M/1$ con $\lambda = 8$ y $\mu = 15$. Por tanto, $W_q = 4.56$ minutos.

10. Una compañía de ordenadores posee un ordenador central al que pueden acceder los clientes a través de unos terminales (de distintos tipos) que se alquilan. Un cliente desea determinar la velocidad óptima del terminal que debería alquilar. Los trabajos del cliente se generan según un proceso de Poisson con una tasa de 50 programas por día de 8 horas. El tamaño medio de un programa es de 1000 sentencias. Se sabe que el tiempo de lectura de sentencias es exponencial. El cliente estima en 10 euros el coste de retrasar un programa un día. La compañía estima que una velocidad de 100 sentencias por minuto, y cualquier aumento semejante, incrementa el precio del alquiler diario del terminal en 100 euros. Determina la velocidad óptima del terminal.

Solución. Sistema $M/M/1$ con $\lambda = 50$ programas mandados al día y $\mu = ?$ programas ejecutados por día (variable de decisión). El coste por retrasar un programa un día es de 10 euros. Como 100

sentencias por minuto equivalen a 48 programas por día, entonces el coste por programa por unidad de incremento de μ y por día es de $100/48 = 2.083$ euros.

Por tanto, el coste total es igual a

$$10L + 2.083\mu$$

que se maximiza en $\mu = 52.19$ programas leídos al día.

11. Una compañía ferroviaria pinta sus propios vagones, según se vayan necesitando, en sus propios talleres donde se pinta a mano de uno en uno con una velocidad que se distribuye según una exponencial de media un cada 4 horas y un coste anual de 4 millones de euros. Se ha determinado que los vagones pueden llegar según un proceso de Poisson de media un cada 5 horas. Además el coste por cada vagón que no está activo es de 500 euros la hora.

Se plantean otras dos posibilidades. Una es encargar dicho trabajo a una empresa de pintura que lo haría con aerosol con el consiguiente ahorro de tiempo. Sin embargo el presupuesto para esta segunda alternativa es de 10 millones de euros anuales. En este caso, el proceso se aproxima a uno de Poisson con una tasa de uno cada 3 horas. La otra opción es poner otro taller exactamente igual al que hay actualmente, con igual tasa de servicio y coste anual que permita pintar dos vagones a la vez.

En todos los casos el trabajo se considera ininterrumpido, esto es, se trabajan $24 \times 365 = 8760$ horas anuales. ¿Cuál de los tres procedimientos es preferible?

Solución. Taller con pintura a mano: sistema $M/M/1$ con $\lambda = 1/5$ y $\mu = 1/4$ vagones/hora. Por tanto,

$$CT = 500L + \frac{4 \times 10^6}{8760} = 2456.62 \text{ euros por vagón.}$$

Taller con pintura con aerosol: sistema $M/M/1$ con $\lambda = 1/5$ y $\mu = 1/3$ vagones/hora. Por tanto,

$$CT = 500L + \frac{10 \times 10^6}{8760} = 1891.55 \text{ euros por vagón.}$$

Dos talleres con pintura a mano: sistema $M/M/2$ con $\lambda = 1/5$ y $\mu = 1/4$ vagones/hora. Por tanto,

$$CT = 500L + \frac{8 \times 10^6}{8760} = 1389.43 \text{ euros por vagón.}$$

Coste anual por hora = 2456.62 . Coste con aerosol = 1891.55 . Coste con dos servidores = 1389.43 . Por tanto, es preferible poner dos talleres.

12. Una empresa de reparación de ordenadores recibe una media de 10 solicitudes de reparación al día, que se distribuyen según un proceso de Poisson. Se supone que μ es la velocidad de reparación de la persona reparadora en ordenadores/día, y el tiempo de reparación es exponencial. Cada unidad de velocidad de reparación supone un coste de 100 euros por semana. Además, se ha estimado que el coste de tener ordenadores no reparados supone 200 euros por ordenador y semana, siendo este coste proporcional al tiempo. Suponiendo que una semana tiene cinco días laborables, se pide:

- Que determines la velocidad de reparación óptima.
- Que determines si sería más económico tener dos personas, cada una con la mitad de la velocidad determinada en el apartado anterior.

Solución. Sistema $M/M/1$ con $\lambda = 10$ y $\mu = ?$.

- a) El coste total es $20\mu + 40L$ euros diarios. Por tanto, la tasa óptima es de 14.47 ordenadores por día, con un coste diario de 378.43225 euros.
- b) En este caso se trata de un sistema $M/M/2$. Por tanto, el coste diario de 395.184 euros, que es peor que el anterior.

13. Una base de mantenimiento de aviones dispone de recursos para revisar únicamente un motor de avión a la vez. Por tanto, para devolver los aviones lo antes posible, la política que se sigue consiste en aplazar la revisión de los 4 motores de cada avión. En otras palabras, solamente se revisa un motor del avión cada vez que un avión llega a la base. Con esta política, los aviones llegan según una distribución de Poisson de tasa media uno al día. El tiempo requerido para revisar un motor (una vez que se empieza el trabajo) tiene una distribución exponencial de media $1/2$ día. Se ha hecho una propuesta para cambiar la política de revisión de manera que los 4 motores se revisen de forma consecutiva cada vez que un avión llegue a la base. A pesar de que ello supondría cuadruplicar el tiempo esperado de servicio, cada avión necesitaría ser revisado únicamente con una frecuencia 4 veces menor. Utilizar la teoría de colas para comparar las 2 alternativas.

Solución. En los dos casos se trata de colas $M/M/1$, puesto que tanto los tiempos entre llegadas como los tiempos de servicio son variables aleatorias con distribución exponencial.

En la situación actual, la tasa de llegadas es $\lambda = 1$ avión al día y la tasa de servicio es $\mu = 2$ aviones al día. Con estos parámetros, $\rho = 0.5 < 1$, y por tanto existe el estado estacionario. Los valores de las cantidades de interés son:

$$L = 1 \text{ avión}, L_q = 1/2 \text{ avión}, W = 1 \text{ día}, W_q = 1/2 \text{ día}$$

Si se siguiera la propuesta para cambiar la política, la cola seguiría siendo una $M/M/1$, pero ahora las tasas de llegada y de servicio serían $\lambda = 0.25$ aviones al día, y $\mu = 0.5$ aviones al día, respectivamente. En este caso, ρ sigue siendo 0.5 y por tanto sigue existiendo el estado estacionario. Los valores de las cantidades de interés son:

$$L = 1 \text{ avión}, L_q = 1/2 \text{ avión}, W = 4 \text{ días}, W_q = 2 \text{ días}$$

Con la configuración propuesta, cada vez que un avión vaya a ser revisado pasará en el sistema el cuádruple del tiempo que pasaba con el sistema anterior, pero como cada avión va a ir con una frecuencia cuatro veces menor, el tiempo perdido en el taller a largo plazo va a ser igual. En este caso, la decisión entre una configuración y la otra debería ser tomada en función de los costes de operación.