Ejercicios de Flujos en Redes y Optimización Combinatoria

Investigación Operativa
Ingeniería Informática, UC3M

Curso 06/07

1. Una compañía logística quiere transportar madera desde 3 centros forestales a 5 centros de demanda. Los costes de transporte (en euros) se muestran en la siguiente tabla junto con la producción y demanda en cada centro:

	D1	D2	D3	D4	D5	Producción
F1	100	200	400	350	150	30
F2	350	300	600	700	500	20
F3	300	200	450	300	200	28
Demanda	10	20	16	20	7	

   - ¿Qué problema de programación lineal da el óptimo (mínimo coste total de transporte) de este problema?

   Solución.

   - El problema a resolver es

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & c^T x \\ \text{sujeto a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 28 \\ -10 \\ -20 \\ -16 \\ -25 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$c^T = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 400 & 350 & 150 & 350 & 300 & 600 & 700 & 500 & 300 & 200 & 450 & 300 & 200 \end{pmatrix}.$$

Observemos que el problema original es equilibrado, es decir, la suma de las demandas es igual a la suma de las producciones.

- El método de la esquina noroeste nos proporciona una solución básica factible:

	D1	D2	D3	D4	D5	Producción
F1	10	20				30
F2		0	16	4		20
F3				21	7	28
Demanda	10	20	16	25	7	

Con coste: 25100

La solución óptima del problema es:

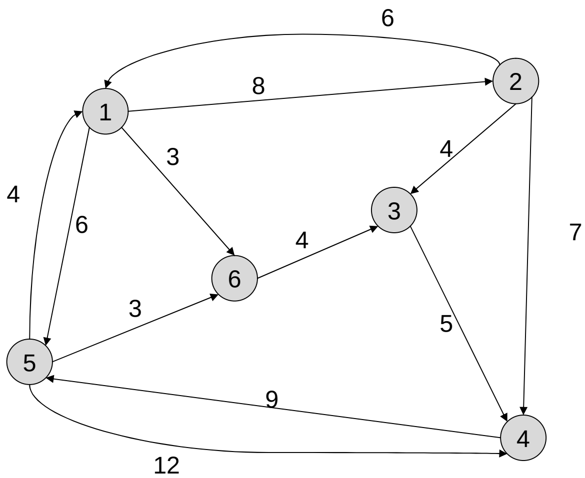
	D1	D2	D3	D4	D5
F1	10		13		7
F2		20			
F3			3	25	

con coste igual a 22100 euros. Como el problema es degenerado puede ocurrir que el método de PL que resuelva el problema devuelva una solución que no esté en un vértice con la misma función objetivo. Por ejemplo,

	D1	D2	D3	D4	D5
F1	10		13.82		6.19
F2		20			
F3			2.18	25	0.82

2. En la red de la Figura 1, encuentra el camino más corto desde el nodo 2 al resto de nodos.

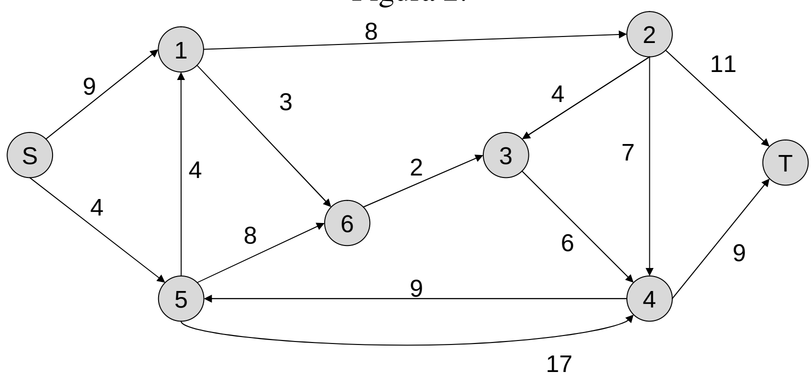
Figura 1:



Solución. Del nodo 2 al nodo 1: (2,1); del nodo 2 al nodo 3: (2,3); del nodo 2 al nodo 4: (2,4); del nodo 2 al nodo 5: (2,1,5); del nodo 2 al nodo 6: (2,1,6).

3. En la red de la figura 2, encuentra el camino más corto desde el nodo S al nodo T.

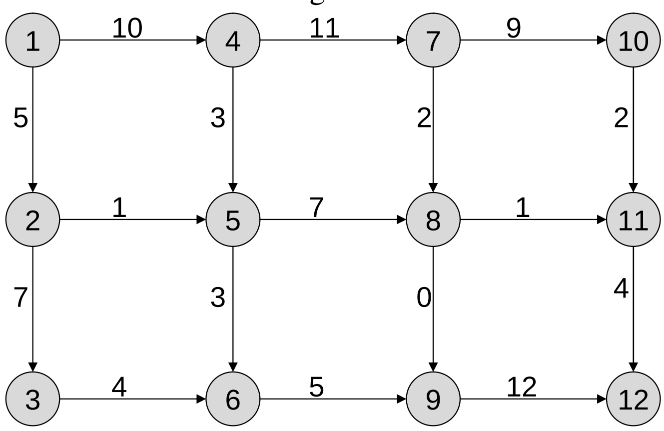
Figura 2:



Solución. (S,5,1,2,T).

4. En la red de la figura 3, encuentra el camino más corto desde el nodo 1 al nodo 12.

Figura 3:



Solución. (1,2,5,8,11,12).

5. Una empresa se dedica al tratamiento de docmentos bancarios. El proceso que sigue un documento cuando se recibe en la empresa es: lectura por escáner (OCR) y grabación en un disco óptimo. Para realizar cada una de estas operaciones, la empresa dispone de varios equipos:

   OCR La empresa dispone de dos OCRs distintos, el primero tarda 10 milisegundos en leer un documento y el segundo, de mayor calidad, es capaz de leer un documento en 8 milisegundos.

   Grabadoras Tres grabadoras G1, G2 y G3, que graban un documento a una velocidad de 7,8 y 10 milisegundos por documento, respectivamente.

   Cada uno de los aparatos anteriores se han ido comprando en distintos momentos y, por tanto, sus especificaciones no son siempre compatibles. Por ello, ha sido necesario instalar una interface a la salida de cada OCR que permita transmitir un documento desde el OCR hasta las grabadoras. La siguiente tabla muestra cuáles son los tiempo de transmisión entre el OCR y las grabadoras (en milisegundos):

	G1	G2	G3
OCR1	4	1	2
OCR2	5	2	2

Si atendemos al criterio de tiempo de tratamiento de un documento, ¿Qué OCR y qué grabadora deben seleccionarse para que el tiempo de proceso de un documento sea el menor posible?

- Escribe un modelo de programación matemática que permita tomar esta decisión.
- Formula este problema como un problema de caminos mínimos.

Supongamos que en caso anterior no se considera el tiempo de proceso y el objetivo pasa a ser procesar el mayor número de documentos. Se sabe que el número de documentos que se pueden procesar en cada dispositivo es el siguiente:

OCR	número documentos	INTERFACE	número de documentos	GRABADORAS	número de documentos
1	300	1	400	1	200
2	350	2	300	2	200
				3	300

Nota: El INTERFACE 1 está conectado al OCR 1 y el INTERFACE 2 lo está al 2.

Además desde cada INTERFACE a cada grabadora sólo es posible enviar 200 documentos.

- Determinar el número máximo de trabajos que pueden procesarse. ¿Qué modelo matemático debe utilizarse para obtener la solución?
- Si se pudiese ampliar la capacidad de algún dispositivo del sistema, en cuál o cuáles deberíamos centrar los esfuerzos. Justificar matemáticamente la respuesta.

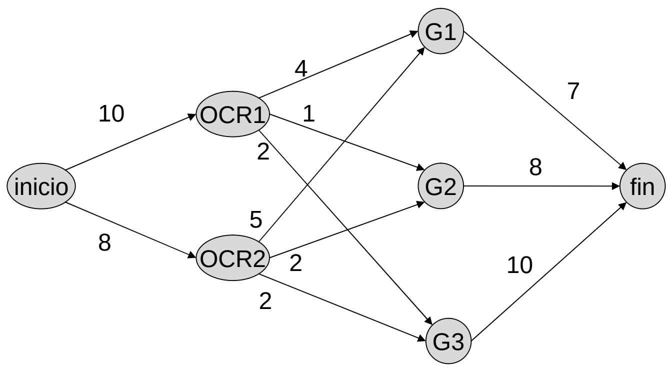
Solución.

- Si utilizamos variables binarias:
  - $o_i, i = 1, 2$ =1 si se usa la OCR i.
  - $g_j, j = 1, \ldots, 3$ =1 si se usa la grabadora j.
  - $x_{ij}, i = 1, 2; j = 1, \ldots, 3$ =1 si se pasa de la OCR i a la grabadora j

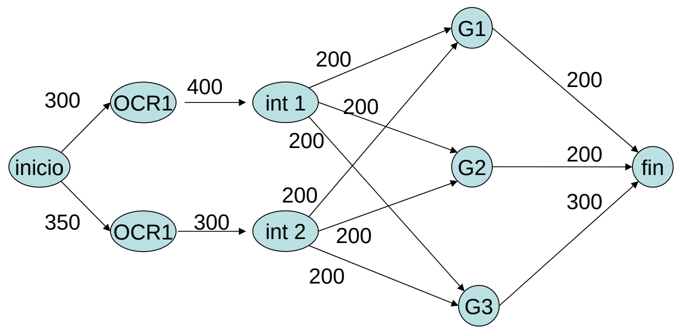
  podemos modelar el problema como:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & 10o_1 + 8o_2 + 4x_{11} + 1x_{12} + \cdots + 2x_{23} + 7g_1 + 8g_2 + 10g_3 \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i,j} x_{ij} = 1 \\ & x_{ij} \leqslant o_i \quad \forall i, j \\ & x_{ij} \leqslant g_j \quad \forall i, j \\ & x_{ij}, o_i, g_j \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \end{aligned}$$

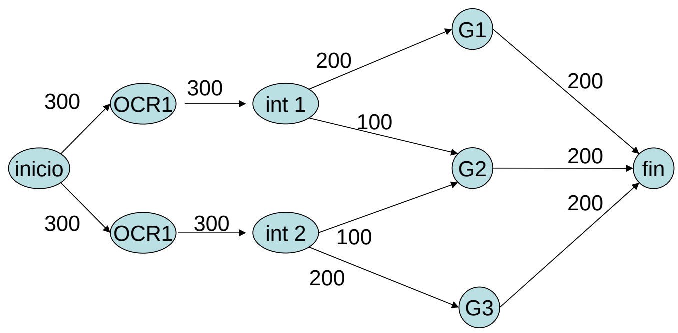
- Podemos representar este problema como encontrar un camino de coste mínimo entre los nodos *inicio* y *fin* en el grafo:



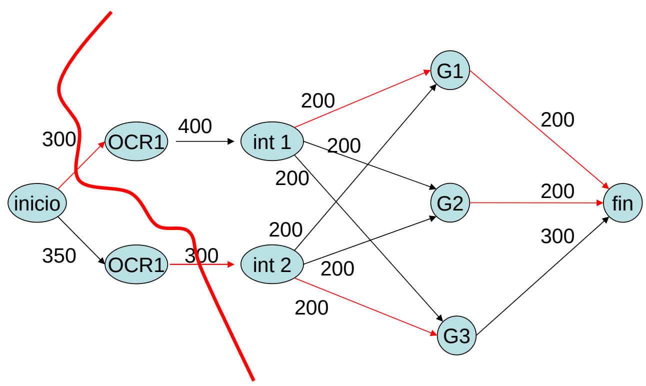
En el caso de que nuestro objetivo sea procesar el mayor número posible de trabajos deberíamos resolver un problema de flujo máximo de *inicio* a *fin* en la red:



El número máximo de documentos que podremos procesar es 600. Una posible forma de hacerlo será:



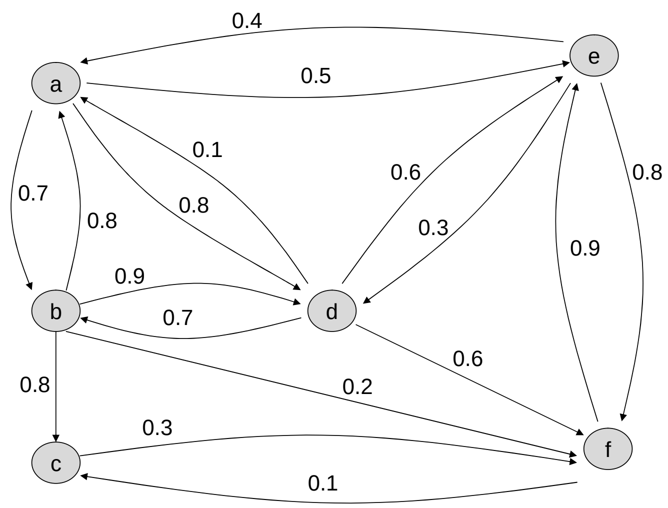
En el gráfico siguiente se muestra un corte de capacidad 600. Para aumentar la capaciadad del grafo es imprescindible aumentar, al menos, la capacidad de algunos de los arcos que cruzan el corte. Por tanto, sería necesario aumentar la capacidad de la OCR1 o del interface 2.



6. Uno de los mayores problemas que se plantea en internet es decidir por donde enviar los ficheros que reciben los distintos servidores. Una visión miope o local del asunto podría llevar a que cada router enviase los mensajes por la conexión que tenga menos congestionada en cada momento. Esto nos puede llevar a retrasar los envíos. Otra posibilidad es que cada router tenga definida una tabla, de forma que cada vez que le llegue un fichero con un destino determinado sepa por qué línea tiene que enviar dicho fichero.

   En la práctica, existen diversas alternativas para construir esta tabla. Una de las primeras y más extendidas consiste en lo siguiente. Cada cierto tiempo (pocos minutos) cada enrutador envía al resto de los servidores información sobre la saturación de las conexiones que salen de ese servidor (se informa sobre el nivel de ocupación de cada línea en $\%$). Con toda esta información se resuelve el problema de encontrar el camino de distancia mínima entre cualquier par de enrutadores, donde la distancia de un camino se define como la suma de la saturación de todas las líneas que lo forman. Con esta solución se crea una tabla para cada enrutador con dos entradas: “destino final” y “siguiente enrutador en el camino óptimo”. De esta forma, cuando a un enrutador le llega un nuevo fichero, consulta en la tabla cuál es el siguiente enrutador que le corresponde según el destino final del fichero.

   Supongamos que tenemos una red con los siguientes enrutadores (nodos), conectados entre sí según se muestra en la figura:



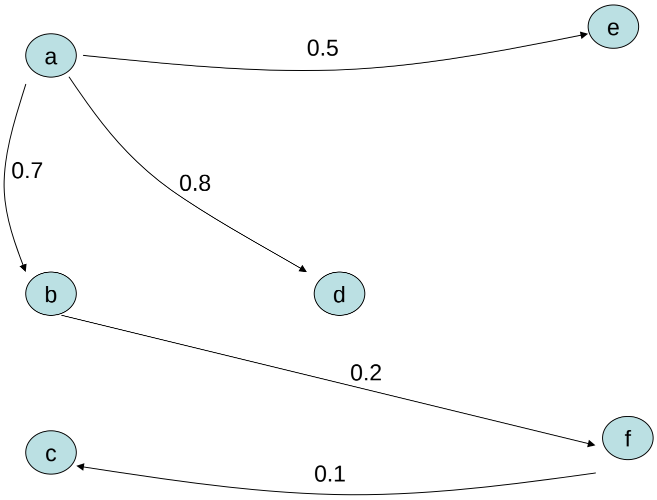
   La etiqueta asignada a cada arco representa el nivel de saturación (en tanto por uno).

   Construye la tabla de enrutamiento del nodo a de acuerdo con el esquema expuesto anteriormente.

   ¿por qué no tenemos en cuenta de dónde ha salido el fichero para determinar cuál es el siguiente enrutador que le corresponde?, ¿por qué sólo tenemos en cuenta cuál es su destino final?

   Solución Para construir la tabla de enrutamiento del nodo a debemos calcular el árbol de caminos mínimos de a al resto de los nodos del grafo utilizando como pesos las saturaciones de los arcos utilizando, por ejemplo, el algoritmo de Dijkstra.

   En la figura siguiente se muestra un árbol de caminos mínimos:



A partir de este árbol podemos construir la siguiente tabla de enrutamiento:

destino	b	c	d	e	f
mandar a	b	b	d	e	b

7. En la oficina de telégrafos de la ciudad I hay 126 telegramas urgentes de igual duración en cuanto a su transmisión destinados a la localidad Z, donde son recibidos en tres centrales, G, H y J. Cada una de estas centrales puede recibir (simultáneamente) 28, 19 y 17 telegramas, respectivamente.

   La transmisión de los telegramas se realiza a base de conexiones con centrales de otras ciudades. Dependiendo de las características de cada una de estas conexiones las posibilidades de enviar varios mensajes simultáneamente a través de ellas cambian. En la tabla siguiente se recogen las distintas posibilidades (una casilla en blanco indica la imposibilidad de transmisión a los efectos que nos interesan):

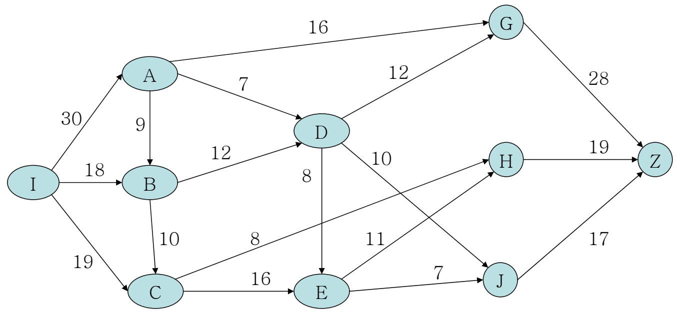
	Destinos							
Orígenes	A	B	C	D	E	G	H	J
I	30	18	19					
A		9		7		16		
B			10	12				
C					16		8	
D					8	12		10
E							11	7

   Si la duración de la transmisión de un telegrama es de 77 segundos, independientemente de las conexiones realizadas para ello, ¿cómo determinarías cuánto tiempo se tardaría en transmitir los 126 mensajes?

   Sin obtener la solución óptima del problema, ¿podrías dar una cota inferior para el tiempo mínimo necesario para completar la transmisión de los 126 mensajes?

   Solución

   En primer lugar, calculamos el flujo máximo en la red



para saber el número máximo de telegramas que se pueden enviar simultáneamente. Sea f este flujo. En ese caso, hará falta hacer, al menos, $\lceil \frac{126}{f} \rceil$ envíos de manera que el tiempo mínimo necesario para enviar todos los mensajes será $\underline{t} = 77\lceil \frac{126}{f} \rceil$ segundos.

La capacidad de cualquier corte en el grafo nos va a dar una cota superior del flujo máximo y de ésta podremos deducir una cota inferior del tiempo necesario.

Por ejemplo, el corte $S = \{I, A, B, C, D, E, G, H, J\}$ y $N \setminus S = \{Z\}$ tiene capacidad 64. Por tanto, sabemos que $f \leqslant 64$ y $\underline{t} \geqslant 77\lceil \frac{126}{64} \rceil = 154$. (En un sólo envío no pueden mandarse más de 64 mensajes de manera que no es posible mandar todos los mensajes en menos de 2 envíos. Por tanto, no se pueden mandar en menos de 154 segundos)

8. Una compañía de reforestación sembrará árboles en ocho zonas en la misma área. Para esto debe desarrollar un sistema de caminos de tierra para tener acceso a cualquier zona desde cualquier otra. La distancia entre cada par de zonas viene dada en la siguiente tabla:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-	13	21	9	7	18	20	15
2		-	9	18	12	26	23	11
3			-	26	17	25	19	10
4				-	7	16	15	9
5					-	9	11	8
6						-	6	10
7							-	5
8								-

¿Entre qué pares de zonas deben construirse caminos para conectarlas todas con una longitud total mínima de caminos?

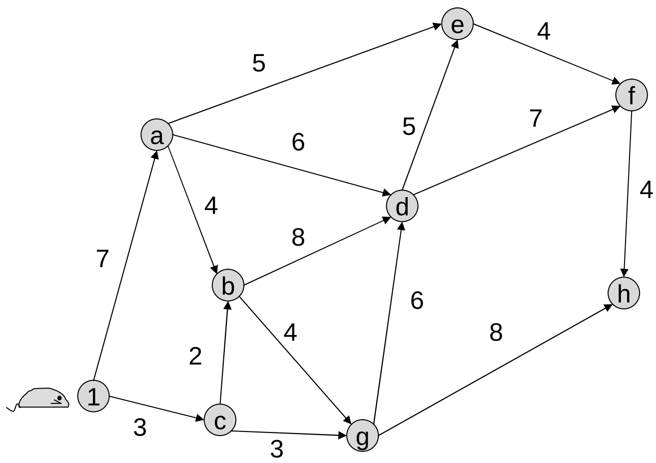
Solución.

Podemos responder a la pregunta encontrando un árbol de expansión de coste mínimo (MST) en un grafo completo con un nodo por cada zona y pesos en los arcos iguales a la distancia entre las zonas que unen.

Para encontrar el MST podemos usar, por ejemplo, el algoritmo de Kruskal o el de Prim.

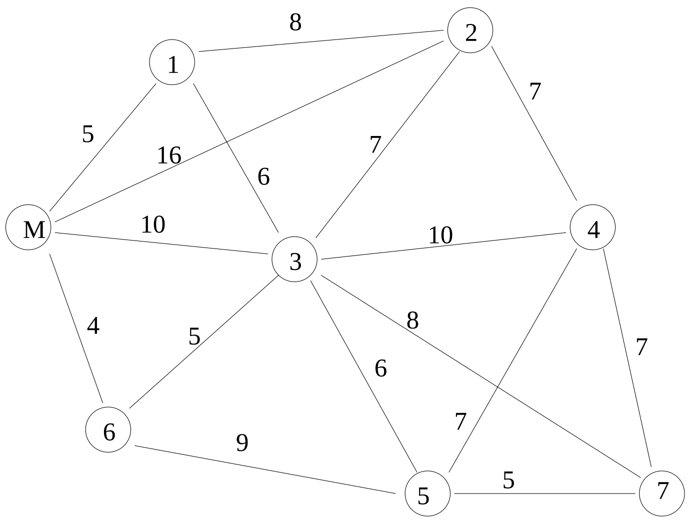
Una solución óptima es pavimentar los tramos: $1-5$, $2-3$, $3-8$, $4-5$, $5-8$, $6-7$ y $7-8$, lo que supone una distancia total de 52.

9. El siguiente grafo muestra un complejo de túneles, y los números que están al lado de los arcos representan las longitudes de los túneles. Queremos dejar una porción de queso en algún nodo de la red de manera que el ratón que se encuentra en el nodo 1 tarde lo máximo posible a encontrarlo, teniendo en cuenta que es un excelente rastreador.



Solución. Para resolver este problema basta con encontrar el árbol de caminos mínimos desde 1 al resto de los nodos, y escoger el nodo cuyo camino correspondiente sea el más largo.

10. La mayoría de los vecinos de un cierto municipio trabaja en alguno de los siete pozos que una compañía minera explota cerca del municipio. El municipio, los pozos y las vías que los conectan están descritos en el gráfico siguiente:



Antes de las elecciones el actual alcalde prometió a todos los veccinos que pavimentaría algunos caminos de forma que cada trabajador tuviera pavimentado el camino más corto desde el municipio hasta su mina. ¿ Cuántos kilómetros se habría ahorrado pavimentar si sólo hubiera prometido que cada trabajador tendria un camino pavimentado para acceder a su mina?

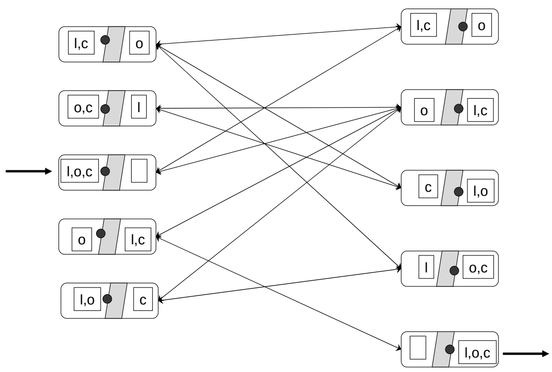
Solución. Para calcular el coste de la promesa del alcalde, hay que buscar el árbol de caminos mínimos desde M al resto de los nodos, y sumar los costes de todos los arcos del árbol. En cambio, si sólo hubiera prometido pavimentar algun camino para todos los mineros, el coste sería el del árbol generador de coste mínimo.

11. Describe el problema del viajante de comercio como un problema de optimización combinatoria **Solución.**

    - Conjunto S: Los arcos del grafo
    - Familia de subconjuntos elegibles $\mathcal{I}$: Conjuntos de arcos que forman un cicuito hamiloniano.
    - Coste asociado a $I \in \mathcal{I}$: suma de los costes de los arcos.
    - Objetivo: Encontrar $I \in \mathcal{I}$ con coste asociado mínimo.

12. Un grangero viaja con un lobo, un cordero y una caja de coles. En un punto de su viaje, debe cruzar el rio, pero la barca de qué dispone no soporta más peso que el del grangero y un animal, o el grangero y la caja. El grangero debe decidir cómo cruzar a los animales y las coles al otro lado del rio, sin dejar en ningún momento solos al lobo con el cordero ni al cordero con las coles.

    Representa este problema como el problema de encontrar el camino más corto entre dos nodos de una red. **Solución.** Construimos una red con un nodo para cada estado del sistema y arcos conectando aquellos estados entre los que se puede cambiar con un viaje del grangero sin que pase nada:



    (Observad que todos los arcos se pueden recorrer en los dos sentidos)

    El problema se reduce a encontrar un camino desde el nodo en el que todos estan a un lado del rio al nodo donde todos estan en el otro lado.

13. Una empresa dedicada a la producción de carrocerías tiene un único túnel de pintura para todas las carrocerías que fabrica. En este momento, se estan fabricando carrocerias negras, rojas, amarillas, azules y blancas. Cada vez que se cambia de color, la producción debe pararse para limpiar el equipo, y evitar que las pinturas se mezclen. El tiempo necesario para esta operación depende de los colores entre los que se pretende cambiar, ya que unos son más sensibles que otros (p. e. hay que limpiar mejor cuando se pasa de un color oscuro a un color claro) Por esto, la empresa pinta juntos todos los coches del mismo color. En estos momentos, debe decidir qué secuencia de colores utilizar para minimizar el tiempo total perdido en limpieza del equipo. Por política de la empresa, todos los dias debe mantenerse el mismo patron, de manera que al final del dia, las máquinas deben dejarse a punto para empezar al día siguiente con el primer color. En la tabla siguiente, estan los tiempos de limpieza del equipo para cada transicion entre colores:

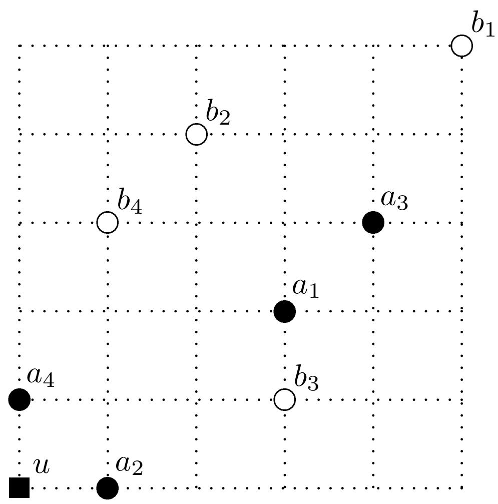
de/a	negro	rojo	amarillo	azul	blanco
negro	0	3	5	2	7
rojo	1	0	4	3	5
amarillo	3	4	0	4	2
azul	1	3	4	0	5
blanco	2	2	1	2	0

Indica cómo se puede encontrar la secuencia óptima de colores.

Solución.

Si construimos un grafo no dirigido completo con un nodo para cada color y pesos en los arcos iguales al tiempo de limpieza para pasar del color origen al color destino; como queremos encontrar una secuencia que incluya todos los colores y vuelva a empezar por el primero, nos bastará con encontrar la solución de un problema del viajante de comercio sobre nuestro grafo.

14. La siguiente figura representa algunas calles de una ciudad. En cada una de las esquinas marcadas con una "a"hay un cliente que desea ser transportado a la esquina marcada con "b" correspondiente; es decir, el cliente situado en la esquina a_1 quiere ir a la esquina b_1, y así sucesivamente.



Un taxista que está situado en el punto marcado con u, desea hacer todos los servicios y regresar al punto de partida, y quiere atender a los clientes en el orden que le suponga el recorrido más corto (todas las manzanas tienen la misma longitud, que tomaremos como unidad). Por supuesto, no pueden coincidir dos clientes en el interior del taxi.

- Escribe un modelo de programación entera para ayudar al taxista a encontrar la mejor ruta. (No es necesario que calcules los coeficientes de todas las variables)
- ¿Serías capaz de transformar este problema en un problema del viajante de comercio asimétrico?

Solución.

- El taxista debe pasar por cada uno de los puntos de la red y volver al punto u, y debe decidir en qué orden. Este problema es muy parecido al problema del viajante de comercio. La diferencia, es que ahora hay relaciones entre los distintos puntos. En realidad, esta relacion se puede reducir a imponer que despues de un punto *a* el taxista debe pasar inmediatamente por el punto *b* correspondiente.

Por tanto, utilizaremos un modelo parecido al del problema del viajante de comercio. Construiremos un grafo dirigido $G = (N, A)$, completo, donde $N = \{u, a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4\}$ Para cada par ordenado $(i, j) \in A$ definiremos una variable binaria x_{ij} que valga 1 si despues del nodo i el taxista va al nodo j y 0 si no. Por ejemplo,

$$x_{b_1 a_2} = \begin{cases} 1 & \text{si el taxista recoge al cliente 2 despues de dejar al 1} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Los costes asociados a estas variables serán las distancias recorridas en cada caso, que podemos calcular en el grafo:

$c_{a_1 b_1}$	$c_{a_1 b_2}$	$c_{b_1 a_1}$	$c_{a_1 a_2}$	$c_{a_2 b_2}$	etc
5	3	5	4	5	

El modelo será:

$$\begin{array}{rll}
\text{minimizar} & \displaystyle\sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} & \\
\text{sujeto a} & \displaystyle\sum_{i\neq j} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in N & \text{(Debo llegar a cada } j \in N\text{)} \\
& \displaystyle\sum_{j\neq i} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in N & \text{(Debo salir de cada } i \in N\text{)} \\
& \displaystyle\sum_{i,j\in S} x_{ij} \leqslant |S| - 1 \quad \forall S \subsetneq N & \text{(No puedo tener circuitos)} \\
& x_{a_1 b_1} = 1; x_{a_2 b_2} = 1; x_{a_3 b_3} = 1; x_{a_4 b_4} = 1 & \text{(Dejar cada cliente despues de recogerlo)} \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A &
\end{array}$$

- El modelo del apartado anterior ya es muy parecido al del problema del viajante de comercio. La única diferencia es el último conjunto de restricciones. En realidad, como despues de cada nodo a el nodo siguiente ya está determinado, en lugar de establecer el orden entre los nodos, nos basta con establecer un orden entre los clientes.

  Las distancias entre cada origen y su destino correspondientes debemos recorrerlas independientemente del orden de atención de los clientes, por tanto podemos construir un modelo donde sólo se intente minimizar el resto de las distancias.

  Por tanto, podemos construir un grafo más pequeño que el anterior, sólo con nodos $N = \{u, 1, 2, 3, 4\}$, dirigido y completo. A las aristas de este grafo les asociamos distancias

$$\tilde{d}_{ij} = \begin{cases} d_{b_i a_j} & \text{si } i, j \neq u & \text{(Atender a } j \text{ despues de } i\text{)} \\ d_{u a_j} & \text{si } i = u, j \neq u & \text{(Atender a } j \text{ en primer lugar)} \\ d_{b_i u} & \text{si } j = u, i \neq u & \text{(Atender a } i \text{ en primer lugar)} \end{cases}$$

Estas nuevas distancias son claramente asimétricas. Por ejemplo $\tilde{d}_{12} = 9$ y $\tilde{d}_{21} = 3$, es decir, atender al cliente 2 despues del 1 supone viajar desde b_1 hasta a_2, que estan a distancia 9, mientra que atenderlos en el orden opuesto supone viajar desde b_2 a a_1, lo que supone una distancia de 3 manzanas.

El problema original es equivalente a resolver el problema del viajante de comercio en este nuevo grafo. La distancia total recorrida será la constante debida a la realización de todos los servicios más el valor óptimo del TSP.