Ejercicios de Programación Lineal

Investigación Operativa
Ingeniería Informática, UC3M

Curso 05/06

1. Una compañía de transporte dispone de 10 camiones con capacidad de 40000 libras y de 5 camiones con capacidad de 30000 libras. Los camiones grandes tienen un coste de transporte de 30 céntimos/milla, y los pequeños de 25 céntimos/milla. En una semana la compañía debe transportar 400000 libras en un recorrido de 800 millas. La posibilidad de otros compromisos recomienda que por cada dos camiones pequeños mantenidos en reserva debe quedarse por lo menos uno de los grandes.

   ¿Cuál es el número de camiones de ambas clases que debe movilizarse para ese transporte de forma óptima y teniendo en cuenta las restricciones?

   Solución.

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & 30 \times 800 x_1 + 25 \times 800 x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 \leq 10 \\ & x_2 \leq 5 \\ & 40000 x_1 + 30000 x_2 \geq 400000 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

2. Se pide que formules el siguiente problema de programación lineal: Tienes 2200 euros disponibles para invertirlos durante los próximos cinco años. Al inicio de cada año puedes invertir parte del dinero en depósitos a un año o a dos años. Los depósitos a un año pagan un interés del 5 %, mientras que los depósitos a dos años pagan un 11 % al final de los dos años. Además, al inicio del segundo año es posible invertir dinero en obligaciones a tres años de la empresa X., que tienen un rendimiento (total) del 17 %. Plantea el problema lineal correspondiente a conseguir que al cabo de los cinco años tu capital sea lo mayor posible.

   Solución. Para plantear el problema seleccionamos como variables las cantidades a invertir en cada activo (depósitos u obligaciones), x_{ti}, donde t indica el año al que corresponde la inversión e i denota el vencimiento de la inversión. Tendremos entonces un total de 10 variables, x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, $x_{31}, \ldots, x_{51}$. Añadiremos también variables x_{t0}, que denotan la posible cantidad de dinero no invertida al inicio de cada año, aunque estas variables no son estrictamente necesarias en este caso. La función objetivo a minimizar será el capital total disponible al final del quinto año, o al comienzo del sexto, que podemos denotar por x_{60} para simplificar el planteamiento.

$$\min x_{60}.$$

   Las restricciones del problema serán:

- Las cantidades disponibles para invertir al inicio de cada periodo deben igualar a las inversiones en el periodo:

$$\begin{aligned}
2200 &= x_{10} + x_{11} + x_{21} \\
x_{10} + 1,05x_{11} &= x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} \\
x_{20} + 1,05x_{21} + 1,11x_{12} &= x_{30} + x_{31} + x_{32} \\
x_{30} + 1,05x_{31} + 1,11x_{22} &= x_{40} + x_{41} + x_{42} \\
x_{40} + 1,05x_{41} + 1,11x_{32} + 1,17x_{23} &= x_{50} + x_{51} \\
x_{50} + 1,05x_{51} + 1,11x_{42} &= x_{60}
\end{aligned}$$

  En las expresiones anteriores, los lados izquierdos son las cantidades de dinero disponibles, y los lados derechos las inversiones al comienzo de cada año.

- No negatividad de las inversiones:

$$x_{ti} \geq 0.$$

En realidad, en la formulación anterior se podrían haber eliminado las variables x_{t0}, que no son más que variables de holgura de restricciones de desigualdad.

3. Una compañía quiere construir un gran dique en un área lejana. Para su construcción necesita mezclar el hormigón en el lugar de construcción del dique, pero dicho hormigón se tiene que producir en cuatro lugares lejanos al del dique. El hormigón se produce a partir de la mezcla de distintos materiales (grava, arena, etc.). La siguiente tabla muestra las cantidades máximas disponibles para cada material y los costes de transporte de cada origen de producción del material al área del dique.

Tipo de material	Cantidad disponible (m^3)	Coste de transporte (€$/m^3$)
A	8000	5.2
B	16000	7.5
C	9000	3.9
D	6000	5.1

Para la construcción del dique se requieren 2 tipos de hormigón que se producirán con distintas mezclas de los cuatro materiales. A continuación se muestran los requisitos de las 2 mezclas:

- Mezcla 1: como mucho puede contener un 50 % de ingredientes de A y B a la vez; al menos tiene que contener un 10 % de ingredientes de C; Los ingredientes de A, B, C y D deben suponer al menos el 98 % de la mezcla.
- Mezcla 2: el ingrediente A debe estar presente en al menos el 20 % de la mezcla; C y D deben suponer al menos la mitad de A y B; Los ingredientes de A, B, C y D deben suponer al menos el 99 % de la mezcla.

La siguiente tabla muestra los costes de cada mezcla y las cantidades mínimas requeridas.

Tipo de hormigón	Coste de la mezcla (€$/m^3$)	Cantidad mínima necesitada (m^3)
Mezcla 1	5.7	9000
Mezcla 2	6.3	15000

El objetivo de la compañía es producir la cantidad necesaria de hormigón con el menor coste posible.

Formula, pero no resuelvas, un problema de programación lineal apropiado para que la compañía tome una decisión. Explica claramente el significado de cada variable que introduzcas en la formulación.

Solución. x_{A1} denota la cantidad (en m^3) de material A usado en la mezcla 1, ..., x_{D2} denota la cantidad (en m^3) de material D usado en la mezcla 2. Además, y_1 denotará la cantidad (en m^3) de hormigón producido por la mezcla 1 e y_2 denotará la cantidad (en m^3) de hormigón producido por la mezcla 2.

El problema a resolver será:

$$
\begin{array}{rl}
\text{minimizar} & 5{,}2(x_{A1}+x_{A2})+7{,}5(x_{B1}+x_{B2})+3{,}9(x_{C1}+x_{C2})+5{,}1(x_{D1}+x_{D2})+ \\
& +\,5{,}7y_1+6{,}3y_2 \\
\text{sujeto a} & x_{A1}+x_{A2}\leq 8000 \\
& x_{B1}+x_{B2}\leq 16000 \\
& x_{C1}+x_{C2}\leq 9000 \\
& x_{D1}+x_{D2}\leq 6000 \\
& y_1\geq 9000 \\
& y_2\geq 15000 \\
& x_{A1}+x_{B1}-0{,}5y_1\leq 0 \\
& x_{C1}-0{,}1y_1\geq 0 \\
& x_{A1}+x_{B1}+x_{C1}+x_{D1}-y_1\leq 0 \\
& x_{A1}+x_{B1}+x_{C1}+x_{D1}-0{,}98y_1\geq 0 \\
& x_{A2}-0{,}2y_2\geq 0 \\
& x_{C2}+x_{D2}-0{,}5(x_{A2}+x_{B2})\geq 0 \\
& x_{A2}+x_{B2}+x_{C2}+x_{D2}-y_2\leq 0 \\
& x_{A2}+x_{B2}+x_{C2}+x_{D2}-0{,}99y_2\geq 0 \\
& x_{A1},\ldots,x_{D2},y_1,y_2\geq 0.
\end{array}
$$

4. Una factoría fabrica dos tipos de productos, A y B. Para su elaboración se requieren dos máquinas, M1 y M2. El artículo A necesita 2 horas de trabajo de la máquina M1 y 1.5 horas de la máquina M2. El artículo B, 1.5 horas, y 1 hora, respectivamente. Cada máquina está funcionando, a lo sumo, 40 horas semanales. Por cada unidad del artículo A se obtiene un beneficio de 250€, mientras que por cada unidad del artículo B es de 150€. ¿Cuántas unidades de A y cuántas de B deben fabricarse semanalmente para obtener un beneficio máximo?

   Solución. Si usamos las variables x_A y x_B para designar las cantidades de producto A y B, respectivamente, el modelo que debemos resolver para decidir el esquema de producción más eficiente es:

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & 250x_A + 150x_B \\
\text{sujeto a} \quad & 2x_A + 1{,}5x_B \leqslant 40 \\
& 1{,}5x_B + x_B \leqslant 40 \\
& x_A, x_B \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

5. La producción anual de una fábrica de cemento es de dos millones y medio de contenedores. La fábrica dispone de colectores mecánicos para controlar la contaminación del aire pero, pese a ello, por la fabricación de cada contenedor se emiten dos unidades de contaminación al aire. Por esta razón, se propone a la industria que reemplace sus colectores por precipitadores electrostáticos, que pueden ser de dos tipos; el tipo A reduce la emisión de partículas contaminantes a la cuarta parte, y el tipo B a la décima parte. Los costes asociados al funcionamiento de los precipitadores son de 0.14€ por contenedor, para el tipo A y de 0.18€ por contenedor para el tipo B. Si la contaminación debe reducirse en 4200000 unidades, ¿Cuántos contenedores de cemento deben seguir tratamiento anticontaminante en cada tipo de precipitador para que el coste de la operación sea el menor posible?

   Solución Tomamos las variables x_A y x_B, que representan el número de contenedores que se tratarán con precipitadores de tipo A y B, respectivamente.

   Así, podemos modelar esta situación como:

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & 0{,}14x_A + 0{,}18x_B \\
\text{sujeto a} \quad & x_A + x_B \leqslant 4500000 \\
& 2\frac{3}{4}x_A + 2\frac{9}{10}x_B \geqslant 4200000 \\
& x_A, x_B \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

6. Dado el siguiente problema de programación lineal:

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & x_1 + x_2 - x_3 \\
\text{sujeto a} \quad & 3x_1 - x_3 = 5 \\
& x_2 - x_3 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

   a) Obtén una solución básica factible (vértice).

   b) Calcula el valor de la función objetivo para dicha solución.

   c) ¿Es el punto $(1335, 4001, 4000)$ la solución del problema? ¿Es mejor que el punto del apartado anterior?

   Solución.

   a) Sólo hay un vértice: $x = (5/3, 1, 0)^T$ que se corresponde con la base $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $c^T x = 8/3$.

c) $c^T x = 1336$, por lo que no es solución. Si el problema es no degenerado y acotado entonces $x = (5/3, 1, 0)^T$ es la solución.

7. Transforma a la forma estándar el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & 4 \leq 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 20 \\ & 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 3. \end{aligned}$$

Solución. Introduciendo las siguientes variables para las cotas: $x_3 = x_4 - x_5$, $x_2 = x_6 + 3$, se tiene:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & -3x_1 - 3x_4 + 3x_5 - 2x_6 - 6 \\ \text{sujeto a} \quad & 2x_1 + x_4 - x_5 + x_6 + x_7 = 17 \\ & 3x_1 + 2x_4 - 2x_5 - x_6 + x_8 = 9 \\ & x_7 + x_9 = 16 \\ & x_1, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0. \end{aligned}$$

8. Dado el problema lineal

$$\begin{aligned} \max_x \quad & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & -x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

justifica que el punto $x_0 = (2 \quad 2 \quad 0)^T$ es un vértice factible. Calcula la solución del problema aplicando el método Símplex.

Solución. Comenzamos por reescribir el problema en forma estándar. Obtenemos

$$\begin{aligned} \min_x \quad & -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & -x_1 + 3x_2 - s = 4 \\ & x, s \geq 0. \end{aligned}$$

Para comprobar si x_0 es un vértice factible, vemos si cumple las restricciones. Si tomamos $s = 0$, se cumplen dichas restricciones. Además, debemos tener $n - m = 4 - 2 = 2$ variables iguales a cero, que en este caso son x_3 y s. Por tanto se trata de un vértice factible. A continuación comprobamos si es solución óptima. Para ello calculamos el vector de multiplicadores

$$\begin{aligned} B^T\lambda &= c_b, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \sigma_n &= c_n - N^T\lambda = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El primer multiplicador es negativo, por lo que el punto no puede ser solución óptima. Para calcular la solución óptima nos alejamos de la restricción $x_3 \geq 0$. La dirección de movimiento se obtendrá como

$$\begin{aligned} p_n &= e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ Bp_b &= -Np_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} p_b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow p_b = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow p = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La longitud de paso vendrá dada por

$$\alpha = \text{mín}\left\{ \frac{2}{3/4}, \frac{2}{1/4} \right\} = \frac{8}{3}.$$

El siguiente punto es por tanto $x' = x_0 + \alpha p$, esto es, $x' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} & 0 \end{pmatrix}^T$. Para este punto el vector de multiplicadores será el dado por

$$\begin{aligned} B^T\lambda &= c_b, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \\ \sigma_n &= c_n - N^T\lambda = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Todos los multiplicadores son positivos, y por tanto x' es la solución óptima del problema.

9. Resuelve el siguiente problema lineal mediante el algoritmo símplex:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & x_1 + x_2 - 3x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & 3x_1 - x_3 = 5 \\ & x_2 - x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Solución. El problema es no acotado.

10. Para el problema lineal

$$\begin{aligned} \text{máx}_x \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \leq -3 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

se pide que determines si el problema es factible. Si lo es, indica un vértice factible del mismo, y si no lo es propón alguna modificación del lado derecho de las restricciones para la que el problema correspondiente sí sea factible.

Solución. Para responder a la primera pregunta, comenzamos por poner el problema en forma estándar (y con un lado derecho positivo). Para ello introducimos variables de holgura, y multiplicamos por

-1 la segunda restricción de manera que el lado derecho de todas las restricciones sea positivo:

$$\begin{array}{cc} \min_{x,s} & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 2 \\ & -x_1 - x_2 + x_3 - s_2 = 3 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 - s_3 = 1 \\ & x, s \geq 0. \end{array}$$

Una vez que el problema ya está en forma estándar, para decidir si es factible construimos un problema auxiliar cuya solución sea un vértice factible de este problema. Para ello introducimos variables artificiales, y el problema auxiliar resultante es

$$\begin{array}{cc} \min_{x,s,w} & w_1 + w_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 2 \\ & -x_1 - x_2 + x_3 - s_2 + w_1 = 3 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 - s_3 + w_2 = 1 \\ & x, s, w \geq 0. \end{array}$$

Resolvemos este problema aplicando el método Símplex. El vértice inicial es

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Los multiplicadores en este vértice son:

$$\begin{aligned} B^T\lambda &= c_b, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \sigma_n &= c_n - N^T\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El vértice no es solución. Seleccionamos el multiplicador más negativo y definimos la dirección de movimiento como

$$\begin{aligned} p_n &= e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ Bp_b &= -Np_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} p_b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow p_b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Debemos calcular α y el siguiente punto, y obtenemos

$$\alpha = \text{mín}\left\{2, 3, \tfrac{1}{2}\right\} = \tfrac{1}{2}, \qquad x' = x + \alpha p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos si el nuevo vértice es solución,

$$\begin{aligned} B^T\lambda &= c_b, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \sigma_n &= c_n - N^T\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Los multiplicadores aún no son óptimos. Definimos una nueva dirección de movimiento como

$$\begin{aligned} p_n &= e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ Bp_b &= -Np_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} p_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow p_b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La longitud de paso y el nuevo punto son

$$\alpha = \text{mín}\left\{3, 5\right\} = 3, \qquad x'' = x' + \alpha p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Volvemos a calcular los multiplicadores y obtenemos esta vez

$$\begin{aligned} B^T\lambda &= c_b, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_n &= c_n - N^T\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Estos multiplicadores ya son óptimos, pero en la solución las variables artificiales no son iguales a cero ($w_1 = 1$), luego el problema original no es factible (si lo fuese, la solución cumpliría $w = 0$), y no existe ningún vértice factible para dicho problema. La menor modificación del lado derecho que nos da un problema factible consiste en tomar como nuevo lado derecho $b - w$ (obsérvese que hemos minimizado el tamaño de w). El nuevo lado derecho sería por tanto para el problema original $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T$.

11. Nos dan el problema lineal

$$\begin{aligned} \min_x \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 + x_3 \geq 1 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

y el punto $x = (2 \quad 1 \quad 0)^T$. Se pide que:

a) Justifiques que el punto anterior es un vértice.

b) Encuentres el vértice solución.

c) Determines todos los vértices adyacentes al vértice solución.

d) ¿Tiene más de una solución el problema? Indica todas las soluciones que puedas.

Solución. Como antes, comenzamos por poner el problema en forma estándar. Obtenemos

$$\begin{aligned} \min_{x,s} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 + x_3 - s_1 = 1 \\ & x_1 - 2x_2 + s_2 = 0 \\ & x, s \geq 0. \end{aligned}$$

En el punto que nos dan calculamos los valores de s para que se cumplan las restricciones de igualdad. Obtenemos como punto a estudiar $x = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$. El punto indicado será un vértice factible si cumple las restricciones, y si $n - m = 2$ de las variables son iguales a cero. Sustituyendo los valores dados en las restricciones tenemos que todas ellas se cumplen, y dos variables son iguales a cero, luego tenemos un vértice factible. Para encontrar el vértice solución, aplicamos el método Símplex. Para ello comenzamos por calcular los multiplicadores en el vértice dado

$$
\begin{aligned}
B^T\lambda &= c_b, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\sigma_n &= c_n - N^T\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Los multiplicadores tienen el signo correcto, luego el vértice es solución. Para encontrar los vértices contiguos debemos hacer que cada una de las variables no básicas pase a ser básica (independientemente de sus multiplicadores), y movernos a lo largo de la arista correspondiente. Como tenemos dos variables no básicas, podremos tener hasta dos vértices contiguos. Estos serán

$$
\begin{aligned}
p_n &= e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
Bp_b &= -Np_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} p_b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow p_b = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow p = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

La longitud de paso y el nuevo punto son

$$
\alpha = \text{mín}\,\{3, 3\} = 3, \qquad x' = x + \alpha p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Se trata de un vértice degenerado, ya que tenemos más de 2 variables iguales a cero. Haciendo lo mismo con la segunda variable no básica tenemos

$$
\begin{aligned}
p_n &= e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
Bp_b &= -Np_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} p_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow p_b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow p = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Como la dirección de movimiento tiene todas las componentes mayores o iguales que cero, la arista llega hasta el infinito, y no existe otro vértice en el extremo de la misma. Por tanto, el único vértice contiguo es el dado por $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T$. En relación con soluciones adicionales, para que existan hace falta que el vector σ_n tenga componentes iguales a cero en la solución, ya que las componentes de dicho vector son las derivadas de la función objetivo a lo largo de las aristas que unen los vértices contiguos. En este caso, una componente es igual a cero, y el vértice que se encuentra a lo largo de la arista correspondiente (y todos los puntos sobre la arista) también es solución. Por tanto, los puntos de la forma

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \forall \alpha \in [0,1],$$

son solución del problema.

12. Comprueba que el problema lineal

$$\begin{array}{rc} \text{mín}_x & x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 \\ \text{s.a} & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 \geq -2 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 \geq 0 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

no está acotado. Si te sirve de ayuda, puedes comenzar en el vértice $x = (1\ 0\ 2\ 1\ 0)^T$. ¿Cuáles de las siguientes restricciones hacen que el problema esté acotado?

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &\leq 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 &\leq 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &\leq 8 \end{aligned}$$

¿Por qué?

Solución. Para comprobar si un problema no está acotado, aplicamos el método Símplex y comprobamos si en alguna iteración obtenemos una dirección p que tenga todos sus componentes mayores o iguales que cero. Comenzamos por poner el problema dado en forma estándar. Obtenemos el problema

$$\begin{array}{rc} \text{mín}_x & x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 \\ \text{s.a} & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 - s_1 = -2 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - s_2 = 0 \\ & x, s \geq 0. \end{array}$$

En el punto dado, sustituyendo valores tenemos que $s_1 = s_2 = 0$, y además el punto es un vértice (tenemos 4 variables iguales a cero). Comprobando si el punto es solución obtenemos:

$$\begin{aligned} B^T\lambda &= c_b, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \\ \sigma_n &= c_n - N^T\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7/2 \\ 3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El vértice no es solución, ya que algunos multiplicadores son negativos. Basándonos en el más negativo definimos la dirección de movimiento como

$$
\begin{aligned}
p_n &= e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
Bp_b &= -Np_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} p_b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow p_b = \begin{pmatrix} 2 \\ 7/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow p = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Como $p \geq 0$, el problema no está acotado. Si introducimos la primera restricción, es fácil comprobar que se cumple que, sustituyendo $x + \alpha p$ en la restricción obtenemos

$$1 + 2\alpha - 2 - \frac{7}{2}\alpha + 1 + \frac{1}{2}\alpha + \alpha = 0 \leq 8,$$

luego todos los puntos de la arista no acotada cumplen la restricción (cualquier $\alpha \geq 0$ la cumple) y el problema sigue sin estar acotado. Para la tercera restricción propuesta, en cambio, sí tenemos que el problema resultante está acotado, ya que el conjunto de puntos que cumplen

$$2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 8, \quad x \geq 0$$

está acotado. En particular, por ejemplo tenemos que $0 \leq x_i \leq 8$ para todas las variables, por tanto, la función objetivo nunca puede valer menos que -24, por ejemplo. La segunda restricción es la más complicada de analizar. Con los procedimientos vistos en clase, lo único que podemos hacer es aplicar el método Símplex al problema obtenido tras añadir la restricción. Este problema es

$$
\begin{array}{ll}
\text{mín}_x & x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 \\
\text{s.a} & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\
& x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 - s_1 = -2 \\
& -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - s_2 = 0 \\
& 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 + s_3 = 8 \\
& x, s \geq 0.
\end{array}
$$

Empezamos por el punto indicado, con $s_3 = 6$. Los multiplicadores valen

$$
\begin{aligned}
B^T\lambda &= c_b, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \\ -3/2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\sigma_n &= c_n - N^T\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \\ -3/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7/2 \\ 3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

esto es, lo mismo que en el caso anterior. Si ahora calculamos la dirección de movimiento, obtenemos

$$p_n = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Bp_b = -Np_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} p_b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow p_b = \begin{pmatrix} 2 \\ 7/2 \\ 1/2 \\ -5/2 \end{pmatrix} \Rightarrow p = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -5/2 \end{pmatrix}.$$

Ahora tenemos una componente negativa, por lo que α está bien definida y el punto siguiente es:

$$\alpha = 6/(5/2) = 12/5, \qquad x' = x + \alpha p = \begin{pmatrix} 29/5 \\ 0 \\ 52/5 \\ 11/5 \\ 12/5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Repetimos el cálculo de los multiplicadores, y obtenemos

$$B^T\lambda = c_b, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ -11/5 \\ -7/5 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_n = c_n - N^T\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ -11/5 \\ -7/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/5 \\ 4/5 \\ -11/5 \\ 7/5 \end{pmatrix}.$$

La dirección de movimiento es

$$p_n = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Bp_b = -Np_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} p_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow p_b = \begin{pmatrix} 7/5 \\ 11/5 \\ -2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} \Rightarrow p = \begin{pmatrix} 7/5 \\ 0 \\ 11/5 \\ -2/5 \\ 1/5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El valor de α es ahora

$$\alpha = 11/2, \qquad x'' = x' + \alpha p = \begin{pmatrix} 27/2 \\ 0 \\ 45/2 \\ 0 \\ 7/2 \\ 0 \\ 11/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que repetir el proceso a partir de este punto. Resumiendo los cálculos, obtenemos

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} -1 \\ 11/2 \\ 3 \\ 5/2 \end{pmatrix}, \qquad p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La dirección tiene todas sus componentes positivas, luego de nuevo tenemos que el problema sigue sin estar acotado con la segunda restricción.

13. Resuelve por el método de las dos fases el siguiente problema lineal:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & x_1 - x_3 + x_4 \\ \text{sujeto a} \quad & -2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Solución. El problema de la fase I es:

$$\begin{aligned}
\text{minimizar}\quad & x_5 + x_6 + x_7 \\
\text{sujeto a}\quad & 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 3 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_6 = 6 \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_7 = 5 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0.
\end{aligned}$$

Este problema posee el siguiente vértice inicial:

$$x = (0, 0, 0, 0, 3, 6, 5)^T.$$

Si aplicamos el método símplex nos da la solución:

$$x = (0{,}0286, 1{,}9714, 0{,}6762, 0{,}3238, 0, 0, 0)^T,$$

y dado que las tres últimas componentes son 0, hemos obtenido una solución básica factible para el problema original. Si ahora aplicamos el método símplex empezando por este vértice nos da la solución:

$$x = (0, 2, 2/3, 1/3)^T, \quad c^T x = -1/3.$$

14. Demuestra que, para el algoritmo símplex, si el nuevo vértice se define como $x^+ = x + \alpha p$, entonces

$$c^T x^+ \leq c^T x.$$

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned}
c^T x^+ &= c_B^T x_B^+ + c_N^T x_N^+ \\
&= c_B^T x_B^+ + (c_N)_j (x_N)_j^+ \quad \text{(siendo } j \text{ el índice entrante)} \\
&= c_B^T x_B - \alpha c_b^T B^{-1} N_j + (c_N)_j \alpha \quad \text{(ya que } (x_N)_j^+ = \alpha) \\
&= c_B^T x_B - \alpha \lambda^T N_j + (c_N)_j \alpha \\
&= c_B^T x_B - \alpha((c_N)_j - (\sigma_N)_j) + (c_N)_j \alpha \\
&= c_B^T x_B - \alpha (\sigma_N)_j + c_N^T x_N \\
&= c^T x - \alpha (\sigma_N)_j \\
&\leq c^T x
\end{aligned}$$

15. Justifica, a partir del ejercicio anterior, que el método símplex finaliza en un número finito de iteraciones, siempre que el problema lineal sea no degenerado y acotado.

Solución. La última desigualdad del ejercicio anterior es estricta si el problema es no degenerado ($\alpha > 0$), por lo que el método símplex no puede visitar el mismo vértice en dos iteraciones distintas (cada vez se disminuye la función objetivo). Además, como el número de vértices es finito, el método símplex sólo puede finalizar en un número finito de iteraciones.

16. Resuelve el siguiente problema de programación lineal mediante la versión primal-dual del algoritmo de punto interior y empezando en el siguiente punto factible:

$$x = (1335,\ 4001,\ 4000)^T, \quad \lambda = (0{,}1\ ,\ 0{,}95)^T, \quad \sigma = (0{,}7,\ 0{,}05,\ 0{,}05)^T.$$

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & 3x_1 - x_3 = 5 \\ & x_2 - x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Solución. Empezamos con $\mu = 1$. Las direcciones de movimiento se obtienen de

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1335 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4001 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta\lambda \\ \Delta\sigma \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 933{,}5 \\ 199{,}5 \\ 199{,}0 \end{pmatrix}.$$

Al resolver el sistema anterior:

$$\Delta x \begin{pmatrix} -1{,}33 \times 10^3 \\ -3{,}99 \times 10^3 \\ -3{,}99 \times 10^3 \end{pmatrix}, \quad \Delta\lambda \begin{pmatrix} 0{,}35 \times 10^{-3} \\ -0{,}17 \times 10^{-3} \end{pmatrix}, \quad \Delta\sigma \begin{pmatrix} -0{,}0011 \\ 0{,}0002 \\ 0{,}0002 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $\alpha_P = 1{,}0013$, $\alpha_D = 659{,}9$,

$$\alpha = \min\{1,\ 0{,}9995\alpha_P,\ 0{,}9995\alpha_D\} = 1,$$

y el nuevo punto es

$$x^+ = x + \alpha\Delta_x \begin{pmatrix} 3{,}4516 \\ 6{,}3548 \\ 5{,}3548 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^+ = \lambda + \alpha\Delta_\lambda \begin{pmatrix} 0{,}1004 \\ 0{,}9498 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^+ = \sigma + \alpha\Delta_\sigma \begin{pmatrix} 0{,}6989 \\ 0{,}0502 \\ 0{,}0502 \end{pmatrix}.$$

Ahora reducimos el parámetro de barrera $\mu^+ = 0{,}1 \times \mu = 0{,}1$ y se realiza una nueva iteración.

Se tiene que la solución óptima es $x^* = (5/3, 1, 0)^T$, $c^T x^* 8/3$.

17. Resuelve el siguiente problema de programación lineal mediante la versión primal-dual del algoritmo de punto interior y empezando en el siguiente punto infactible:

$$x = (1, 1, 1, 1, 1)^T, \quad \lambda = (0, 0, 0)^T, \quad \sigma = (1, 1, 1, 1, 1)^T.$$

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & -x_1 - 2x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \\ & x_1 + 2x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Solución. Se tiene que $x^* = (2{,}9942, 0{,}0029, 7{,}9856, 9{,}9885, 0{,}0000)^T$, $c^T x^* = -3$.