# Programación Lineal

**PL:** Parte de la Programación Matemática donde tanto la función objetivo como las restricciones son funciones lineales.

La importancia de esta técnica se debe a la aparición del método Simplex (año 1947) y al desarrollo de los ordenadores.

- Introducción
- Ejemplos
- Propiedades básicas
- Método Simplex
- Método de punto interior

# PL: Introducción

George Dantzig es el padre de la PL. Desarrolla el método Simplex en 1947.

El primer problema de PL fue el problema de la dieta (9 restricciones y 77 variables). Se necesitaron 9 trabajadores durante aproximadamente 15 días para realizar cálculos electrónicos que resolvieron el problema.

La primera implementación del Simplex en ordenador es de 1952. Se resolvió un PL con 48 restricciones y 71 variables en 18 horas.

Actualmente se pueden resolver PL's con millones de variables y restricciones en horas o minutos.

# PL: Introducción

Pero, ¿por qué la PL no se desarrolló antes de los años 50?

Sí que antes de la década de los 40 habían existido pensamientos en términos de optimizar un objetivo general pero con infinidad de alternativas de forma tal que resultaba imposible compararlas todas para escoger la mejor.

Por ejemplo, una problema de planificación de actividades (70 hombres a 70 trabajos) tiene $70!$ posibles soluciones o formas de asignar actividades. Pero $70! > 10^{100}$. La mejor computadora actual tardaría millones de años en hacer las comparaciones.

El Simplex es un algoritmo inteligente que busca las soluciones entre un grupo muy reducido del total.

# Ejemplo 1: dieta alimenticia

Es el problema más clásico. Consiste en elaborar una dieta diaria para un colectivo de personas de forma tal que se suministre a cada individuo de ese colectivo una cantidad mínima de varios ingredientes nutritivos (vitaminas, proteínas, calcio, grasas, hidratos de carbono, etc).

Se supone que existen en el mercado $n$ alimentos distintos (huevos, leche, pan, pollo, etc.) con unos costes unitarios $c_1, \ldots, c_n$, y que se quiere planificar una dieta que contenga al menos $b_1, \ldots, b_m$ unidades de los $m$ ingredientes nutritivos; se sabe que el alimento $j$ contiene $a_{ij}$ unidades del ingrediente $i$.

# Ejemplo 1: dieta alimenticia

El problema consiste en encontrar el vector dieta $x = (x_1, \ldots, x_n)$ que fije las cantidades a comprar cada día de cada alimento de forma tal que el coste total sea mínimo:

# Ejemplo 1: dieta alimenticia

| Ingredientes | Alimento (gr./porción) Ternera | Patatas | Requerimiento diario mínimo (gramos) |
|---|---|---|---|
| Carbohidratos | 5 | 15 | 50 |
| Proteinas | 20 | 5 | 40 |
| Grasa | 15 | 2 | 60 |
| Coste por porción (€) | 5 | 2 | |

- Solución:

$$x_1 = 3.7209, \; x_2 = 2.0930, \; \text{coste} = 22.7907$$

- Multiplicadores: 0.0930 (Carbohidratos), 0 (Proteinas), 0.3023 (Grasa)

# Ejemplo 2: sistemas multitarea

Un ordenador con dos procesadores funciona durante al menos 10 horas diarias en aplicaciones administrativas y académicas. Cada tarea administrativa requiere 2 segundos de CPU en el procesador 1 y 6 segundos de CPU en el procesador 2. Cada tarea académica requiere 5 segundos de CPU en el procesador 1 y 3 segundos de CPU en el procesador 2.

Se requiere programar la cantidad de tareas diarias a asignar a cada procesador de forma tal que se minimice el tiempo que el ordenador está ocupado con estos trabajos.

Sea $x_1$, $x_2$ el número de tareas administrativas y académicas, respectivamente, a ejecutarse en el ordenador. El ordenador se considera ocupado mientras un procesador no haya finalizado su tarea. Por tanto, el objetivo es

que es un objetivo no lineal.

## Ejemplo 2: sistemas multitarea

Para linealizarlo se introduce una nueva variable $x_3$, donde

$$x_3 = \max\{2x_1 + 5x_2, 6x_1 + 3x_2\} \geq 0.$$

Por tanto, el PL es:

$$\begin{array}{rl}
\text{minimizar} & x_3 \\
\text{sujeto a} & 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \times 3600 \\
& 6x_1 + 3x_2 \geq 10 \times 3600 \\
& x_3 \geq 2x_1 + 5x_2 \\
& x_3 \geq 6x_1 + 3x_2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}$$

- Solución: $x = (3000, 6000, 36000)$, coste = 36000 sg.

# PL: Formulación general

Problema genérico de Programación Lineal:

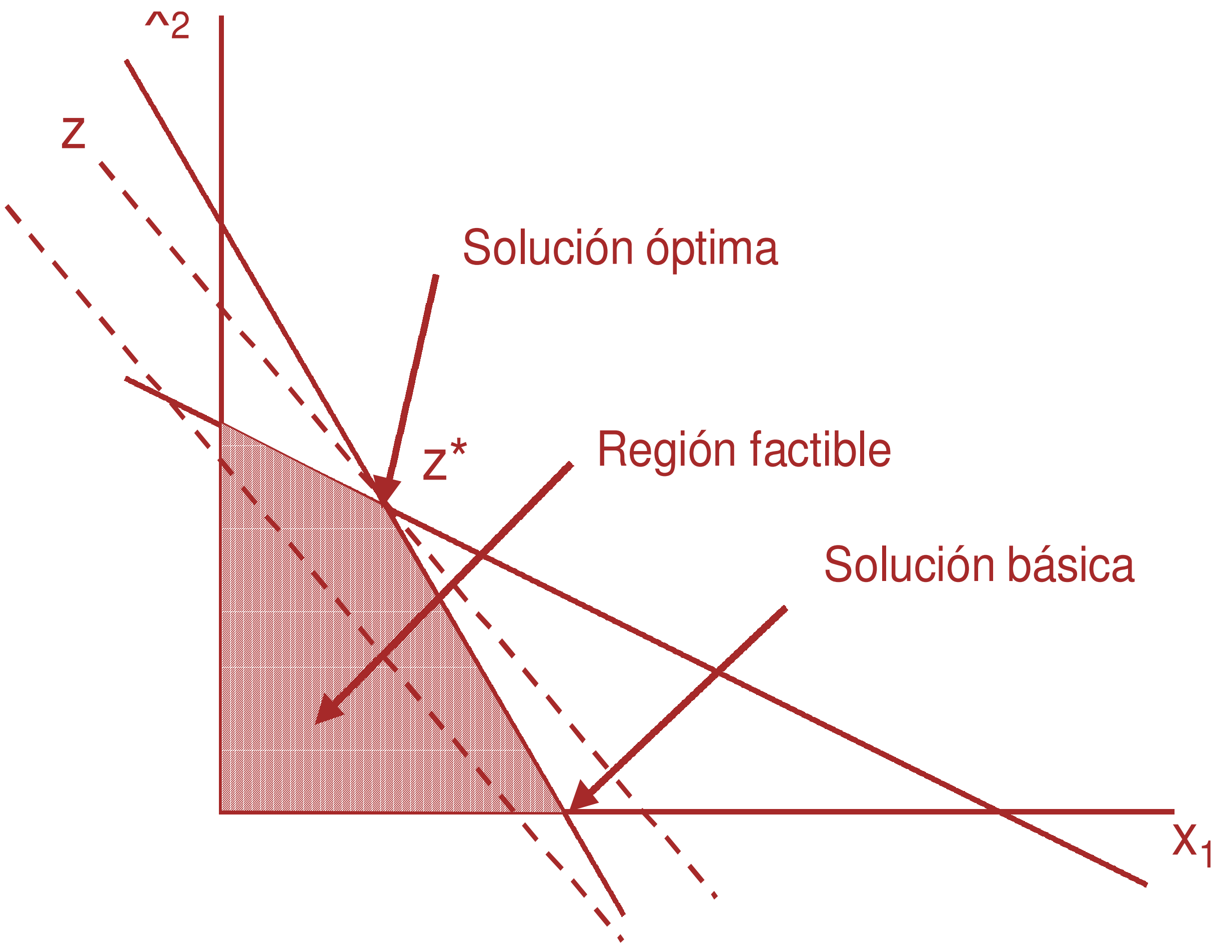
$$\begin{array}{rl} \text{minimizar o maximizar} & c^T x \\ \text{sujeto a} & A\,x \quad \{\leq, =, \geq\} \quad b \\ & x\{\leq, \geq\}0 \end{array}$$

$c$ vector de $n$ componentes, $x$ variables de decisión, $A$ matriz $m \times n$, $b$ vector de $m$ componentes.

Un vector $x$ que satisface las restricciones se denomina **solución factible**.

El conjunto de todas las soluciones factibles se denomina **región factible**.

# PL: Formulación general



## Enfoques de la PL

Los PL's se pueden estudiar de forma algebraica y geométrica. Los dos enfoques son equivalentes.

- Enfoque algebraico: escribir el PL matemáticamente, p.e.

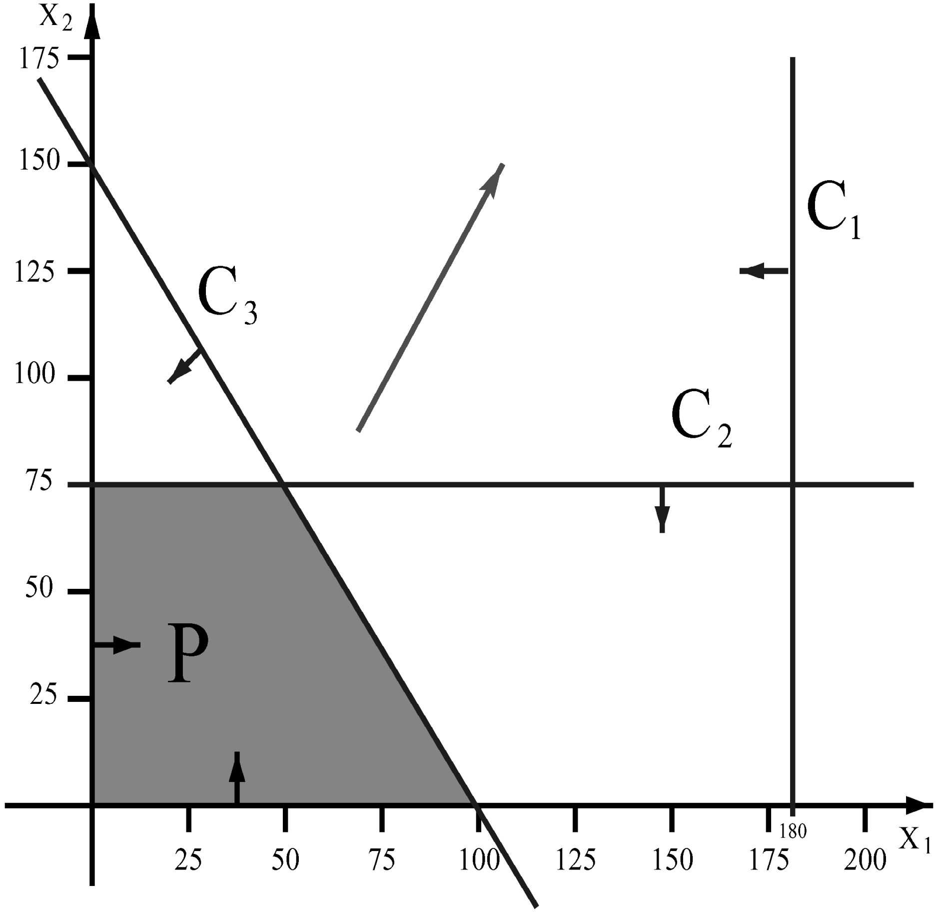
$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 \leq 180 \\ & 2x_2 \leq 150 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 300 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

  y analizar las propiedades *matriciales*, en nuestro caso

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 180 \\ 150 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

## Enfoques de la PL

- Enfoque geométrico: estudiar la geometría de la región factible.



# Enfoques de la PL

Dirección de máximo ascenso: $c = (3, 5)$.

Solución mediante procedimiento geométrico: $x^* = (50, 75)$.

• Se observa que la solución es un punto extremo o vértice de la región factible. Se puede probar que esto siempre es así en PL.

# PL: Forma estándar

Existen muchas formas de representar un PL, aunque resulta conveniente la denominada *forma estándar* o *aumentada*:

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & c^T x \\
\text{sujeto a} \quad & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

Todos los PL's se pueden transformar en forma estándar.

- Por ejemplo, el siguiente problema

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & c^T x \\
\text{sujeto a} \quad & Ax \geq b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

## PL: Forma estándar

se transforma en forma estándar introduciendo variables de holgura, $y$:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & c^T x \\ \text{sujeto a} \quad & Ax - y = b \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

- Si una variable $x_i$ no está restringida, entonces $x_i = y_i - w_i$ con $y_i \geq 0$, $w_i \geq 0$.

- Si el problema es maximizar una función objetivo, se puede transformar en uno que la minimice:

$$\text{maximizar} \;\; c^T x = -\text{minimizar} \;\; -c^T x$$

## Forma estándar: ejemplo

El siguiente PL:

$$\begin{array}{rc}
\text{máx}_x & x_1 + 2x_2 + x_3 \\
\text{s.a} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\
& x_1 + x_2 - x_3 \leq -3 \\
& 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \\
& x \geq 0.
\end{array}$$

es equivalente a

# Soluciones básicas y puntos extremos

- **Punto extremo o vértice**: punto intersección de al menos $n$ caras o hiperplanos (definición geométrica).

- **Solución básica**: definición algebraica que usa la forma estándar. Se dice que un punto $x$ es una solución básica si $Ax = b$ y si las columnas de $A$ asociadas a los elementos no nulos de $x$ son linealmente independientes. Dichas columnas se denominan base y se denotan por $B$. El resto de columnas forma una matriz que se denota por $N$.

$$A = \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix},$$

con $\det(B) \neq 0$.

## Soluciones básicas y puntos extremos

Como $A$ es de rango completo, es posible separar el punto $x$ en dos subvectores: las variables básicas que son los valores de $x$ asociados a la base, $x_B$, y las variables no básicas, $x_N = 0$:

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}.$$

Si además $x_B \geq 0$, entonces $x$ se denomina solución básica factible.

Si $x$ es una solución básica factible, entonces $Ax = b$ es equivalente a $Bx_B = b$ (ejercicio), por lo que $x_b$ se determina por $B$ y $b$.

El número de soluciones básicas factibles es finito y está acotado por $\binom{n}{m}$.

# Soluciones básicas y puntos extremos

• Resultado clave: Un vértice es equivalente a una solución básica factible.

Si en una solución básica factible, alguno de los componentes de $x_B$ es cero entonces se denomina vértice degenerado. La degeneración ocurre cuando un PL contiene restricciones redundantes, p.e. $x_1 - x_2 \leq 3$ y $2x_1 - 2x_2 \leq 6$. Conviene eliminar este tipo de restricciones ya que originan problemas numéricos.

• Resultado clave (**Teorema fundamental de la PL**): Si un PL es factible y acotado, entonces existe al menos una solución óptima que es básica factible.

Por tanto, como un vértice es equivalente a una solución básica factible y el número de soluciones básicas factibles es finito, entonces para encontrar una solución basta con buscarla en los vértices de la región factible. **Ésta es la base del algoritmo Simplex.**

# Formas de solución en un PL

- Solución óptima única (vértice).
- Infinitas soluciones óptimas (arista, cara, región factible).
- Solución óptima no acotada.
- Región factible vacía.

## Método Simplex

- Algoritmo computacional de naturaleza iterativa (como todos los algoritmos de Programación Matemática) que resuelve PL's.

- Lo desarrolla Dantzig en 1947 y marca el inicio de la era moderna en optimización.

- Para su aplicación, se supone la forma estándar de un PL:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & c^T x \\ \text{sujeto a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

donde se asume que $m < n$, de otra forma el sistema $Ax = b$ contendría filas redundantes, sería infactible o definiría un único punto.

# Método Simplex: ideas generales

- Las iteraciones del método Simplex siguen soluciones básicas factibles (vértices).
- En cada paso, el método se mueve de un vértice a uno adyacente por una arista (la base cambia en un componente).
- En casi todas las iteraciones se va reduciendo la función objetivo $c^T x$.
- El paso crucial en cada iteración del simplex consiste en decidir qué cambio se va a introducir en la base $B$.

# Método Simplex

**Paso 0** Dada una solución básica factible: $x_B = B^{-1}b \geq 0$, $x_N = 0$.

**Paso 1** Resolver $B^T\lambda = c_B$.
Calcular $\sigma_N = c_N - N^T\lambda$.

**Paso 2** Si $\sigma_N \geq 0$, STOP, solución óptima encontrada.
Si no, escoger $j \in N$ de forma tal que $\sigma_j < 0$.
Resolver $Bp_B = -N_j$, $p_N = e_j$.

**Paso 3** Si $p_B \geq 0$, STOP, problema no acotado.
Si no, calcular $\alpha = \min\limits_i\{-\frac{(x_B)_i}{(p_B)_i} \;/\; (p_B)_i < 0\}$ e $i$ será el índice donde este mínimo se alcanza.

**Paso 4** Actualizar $x^+ = x + \alpha p$.
Actualizar la base: introducir índice $j$ en $I$ y eliminar índice $i$ en $J$.
Ir a Paso 1.

# Método Simplex: Ejemplo

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

- Transformación a forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & -x_1 - 2x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \\ & x_1 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

## Método Simplex: Ejemplo

Elementos del problema:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Escogemos como base $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Por tanto, $x_b = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $x_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $I = \{3, 4, 5\}$ y $J = \{1, 2\}$.

# Método Simplex: Ejemplo

Notar que $x^T = (0, 0, 2, 7, 3)$, $c_B^T = (0, 0, 0)$, $c_N^T = (-1, -2)$.

Ya tenemos un vértice inicial cuyo valor en la función objetivo es $c^T x = -0 - 2 \times 0 = 0$.

- Cálculo de los multiplicadores:

$$B^T \lambda = c_B, \text{ entonces } \lambda^T = (0, 0, 0).$$

$$\sigma_N = c_N - N^T \lambda, \text{ entonces } \sigma_N^T = (-1, -2).$$

Como los dos componentes del coste reducido son negativos el punto actual no es solución óptima. Vamos a escoger el índice con valor más negativo de $\sigma_N$ como aquel que va a entrar en la base, esto es, $j = 2$ y $x_2$ va a pasar a ser variable básica.

# Método Simplex: Ejemplo

• Cálculo de la dirección de la arista: $Bp_B = -N_j$ y $p_N = e_j$. En nuestro caso $N_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, por lo que $p_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $p_N^T = (0,1)$.

• Cálculo de la longitud de movimiento: $\alpha = \min_i \{-\frac{(x_B)_i}{(p_B)_i} \ / \ (p_B)_i < 0\}$. En nuestro caso $\alpha = \min\{2/1, 7/2\} = 2$. Por tanto, $i = 1$ y $x_3$ saldrá de la base.

• Nuevo punto: $x^+ = x + \alpha p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

## Método Simplex: Ejemplo

Ahora volvemos a iterar el procedimiento. La nueva base es $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$N = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con $I = \{2, 4, 5\}$ y $J = \{1, 3\}$,

y $c_B^T = (-2, 0, 0)$, $c_N^T = (-1, 0)$.

El valor de la función objetivo en el nuevo vértice es $c^T x = -0 - 2 \times 2 = -4$.

# Método Simplex: Ejemplo

- Cálculo de los multiplicadores:

$$B^T\lambda = c_B, \text{ entonces } \lambda^T = (-2, 0, 0).$$
$$\sigma_N = c_N - N^T\lambda, \text{ entonces } \sigma_N^T = (-5, 2).$$

Como el primer componente del coste reducido es negativo, entonces $j = 1$ y $x_1$ va a pasar a ser variable básica.

- Cálculo de la dirección de la arista: $Bp_B = -N_j$ y $p_N = e_j$. En nuestro caso $p_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $p_N^T = (1, 0)$.

# Método Simplex: Ejemplo

- Cálculo de la longitud de movimiento: $\alpha = \min_i \{-\frac{(x_B)_i}{(p_B)_i} \;/\; (p_B)_i < 0\}$. En nuestro caso $\alpha = \min\{3/3, 3/1\} = 1$. Por tanto, $i = 2$ y $x_4$ saldrá de la base.

- Nuevo punto: $x^+ = x + \alpha p = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Tras 2 iteraciones más se obtiene que $x^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es la solución del problema ($c^T x^* = -13$).

# Método Simplex: Comentarios

- Los vectores $\lambda$ y $\sigma$ se denominan **multiplicadores de Lagrange** asociados a $Ax = b$ y $x \geq 0$, respectivamente.

  Informan sobre cómo es de sensible la función objetivo a perturbaciones en las restricciones.

  Por ejemplo, si resolvemos el PL (1) con

  $$b \rightarrow b + \varepsilon\, e_j,$$

  encontramos que (para pequeños valores de $\varepsilon$):

  $$c^T x^* \rightarrow c^T x^* + \varepsilon\, \lambda_j.$$

- El cálculo de $\sigma_N$ se denomina *pricing* y a los componentes de $\sigma_N$ se les llama **costes reducidos** asociados a las variables no básicas $x_N$.

# Método Simplex: Comentarios

- Si el problema es no degenerado y acotado, el método simplex termina en una solución óptima y en un número finito de iteraciones.

- Mayor esfuerzo computacional en solución de $B^T\lambda = c_B$ y $Bp_B = -N_j$ (aunque se puede utilizar la misma factorización $LU$ de $B$ en los dos sistemas). La factorización $LU$ se actualiza de iteración a iteración de forma eficiente (la matriz $B$ sólo cambia en una columna).

- ¿Cómo escoger $j \in N$ de forma tal que $\sigma_j < 0$?

- ¿Cómo escoger el vértice inicial del Paso 0?

- ¿Qué pasa con las iteraciones degeneradas? Esto es, aquellas en las que $\alpha = 0$ por lo que $x$ no cambia.

# Método Simplex: Selección de índice entrante

Lo ideal sería escoger $j \in N$ de forma tal que las nuevas variables entrantes permitiesen encontrar la solución en un número mínimo de iteraciones. Pero el simplex carece de esta *perspectiva global*.

Originalmente se escogía el índice entrante como aquel con valor más negativo de $\sigma_N$. Esta elección no garantiza un descenso suficiente en la función objetivo.

Actualmente existen técnicas más eficientes, por ejemplo estrategias basadas en ***steepest-edge***.

## Método Simplex: Inicialización

El Paso 0 requiere disponer de una solución básica factible: $x_B = B^{-1}b \geq 0$, $x_N = 0$.

**Método de las dos fases:**

- Fase I: se construye un problema auxiliar relacionado con el problema original de forma tal que tiene un vértice inicial trivial de determinar y cuya solución es un vértice inicial para el problema de partida.

- Fase II: se resuelve el problema original empezando con la solución encontrada en la Fase I.

# Método Simplex: Inicialización, Fase I

Problema Auxiliar:

$$\begin{aligned} \text{minimizar}_{x,z} \quad & e^T z \\ \text{sujeto a} \quad & Ax + z = b \\ & x, z \geq 0, \end{aligned}$$

donde se supone que $b \geq 0$, $e = (1, 1, \dots, 1)^T$.

Se tiene que el punto $(x, z) = (0, b)$ es un vértice (solución básica factible) para el Problema Auxiliar (con $I$ matriz básica).

Si el simplex termina con una solución óptima con $z^* > 0$, entonces el problema original es infactible. Si por el contrario el simplex termina con una solución óptima con $z^* = 0$, entonces tenemos un vértice inicial para el problema original.

# Método Simplex: Inicialización, Fase II

Problema de la Fase II:

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & c^T x \\ \text{sujeto a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

que es el problema original que inicializamos con la solución de la Fase I.

• Cuidado: En primer lugar siempre hay que modificar el problema original para que $b \geq 0$.

Por ejemplo, si una restricción es $x_1 - 4x_2 = -2$ entonces se convierte en $-x_1 + 4x_2 = 2$.

# Método Simplex: Degeneración

Recordar que, si en un vértice, alguno de los componentes de $x_B$ es cero entonces se denomina vértice degenerado. En el simplex, la degeneración puede implicar que $\alpha = 0$ (p.e. si $(x_B)_i = 0$ y $(p_B)_i < 0$). Por tanto, el simplex no avanza en una iteración degenerada: el punto siguiente es el mismo y la función objetivo no ha decrecido.

Aunque, la base sí ha cambiado y en este sentido la iteración degenerada puede haber logrado algún progreso hacia la solución.

El problema surge cuando existe un número consecutivo de iteraciones degeneradas: **ciclado**. Puede ocurrir que tras un número de estas iteraciones la base vuelva a su estado original. Y en este caso no se avanza NADA y el simplex itera de forma indefinida sin alcanzar el óptimo.

El ciclado no es un fenómeno raro: se ha observado con frecuencia en la relajación de problemas enteros de gran tamaño.

Por tanto, es esencial incorporar en el simplex técnicas que eviten el ciclado (por ejemplo **métodos de perturbación**, **técnicas lexicográficas**, etc.).

## Método Simplex: Comentarios finales

El simplex ha probado ser muy eficiente en casi todos los problemas prácticos (requiere entre $m$ y $3m$ iteraciones). Pero existen problemas patológicos donde el simplex se comporta muy mal (Klee and Minty, 1972).

Por ejemplo, considerar el siguiente problema:

$$
\begin{array}{rll}
\text{maximizar} & x_1 + 10x_2 + 10^2x_3 + \cdots + 10^{n-1}x_n & \\
\text{sujeto a} & x_1 + 2(10x_2 + 10^2x_3 + \cdots + 10^{n-1}x_n) & \leq 10^{2n-2} \\
& x_2 + 2(10^2x_3 + \cdots + 10^{n-1}x_n) & \leq 10^{2n-4} \\
& \ldots & \ldots \\
& x_{n-1} + 2(10^{n-1}x_n) & \leq 10^{2n-(2n-1)} \\
& x_n & \leq 1 \\
& x_1, x_2, \cdots, x_n & \geq 0
\end{array}
$$

# Método Simplex: Comentarios finales

Es un problema con $2^n$ vértices y el simplex los recorre TODOS antes de alcanzar la solución.

Por ejemplo si $n = 20$, el simplex emplea más de un millón de iteraciones en alcanzar el óptimo.

• La complejidad computacional del simplex es exponencial. Por muchos años se buscó un algoritmo de PL con complejidad computacional polinómica.

• En 1979, Khachiyan desarrolla el método elipsoide con complejidad polinómica. En la práctica resultaba ser ineficiente.

• En 1984, Karmarkar describe un algoritmo polinómico que alcanza la solución por el interior de la región factible. Dicho algoritmo resultó ser eficiente en la práctica. Se inició así el área de los **métodos de punto interior**.

## Método de Punto Interior

• Las iteraciones se mueven en el **interior** de la región factible, al contrario que el simplex que se mueve en la frontera de dicha región.

• Se describirá la versión primal-dual de punto interior. Se considerará un PL en forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & c^T x \\ \text{sujeto a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

# Método de Punto Interior: Idea general

Se impone una barrera (parametrizada por $\mu$) alrededor de la solución.

Las direcciones de movimiento $\Delta x$, $\Delta\lambda$, $\Delta\sigma$ se obtienen de la resolución del sistema lineal (PDL):

$$\begin{pmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ \Sigma & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta\lambda \\ \Delta\sigma \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X\Sigma\, e - \mu e \end{pmatrix}.$$

Se actualiza el nuevo punto (interior) y se reduce la barrera.

# Método Primal-Dual

**Paso 0** Partir de una solución inicial factible interior: $(x, \lambda, \sigma)$ tal que $A^T\lambda + \sigma = c$, $Ax = b$ y $x > 0, \sigma > 0$. Elegir $\mu > 0$.

**Paso 1** Si $x^T\sigma < \varepsilon$ se ha alcanzado la solución. Si no, resolver el sistema lineal PDL y obtener las direcciones de movimiento $(\Delta x, \Delta\lambda, \Delta\sigma)$.

**Paso 2** Calcular

$$\alpha_P = \min_i\{-\frac{x_i}{\Delta x_i} \;/\; \Delta x_i < 0\}, \quad \alpha_D = \min_i\{-\frac{\sigma_i}{\Delta \sigma_i} \;/\; \Delta \sigma_i < 0\}$$

y obtener la longitud de movimiento $\alpha = \min\{1,\ 0.99999\ \min\{\alpha_P, \alpha_D\}\}$.

**Paso 3** Actualizar el nuevo punto: $x = x + \alpha\Delta x$, $\lambda = \alpha\lambda + \Delta\lambda$, $\sigma = \sigma + \alpha\Delta\sigma$.

**Paso 4** Reducir el parámetro de barrera: $\mu = \theta\mu$, con $0 < \theta < 1$. Ir a Paso 1.

# Ejemplo

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

- Transformación a forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & -x_1 - 2x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \\ & x_1 + 2x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

# Ejemplo

Elementos del problema:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Punto inicial factible interior:

$$x = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 2.5 \\ 6.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

# Ejemplo

- Resolvemos el sistema lineal (PDL), con $\mu = 10$:

$$\begin{pmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ \Sigma & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta\lambda \\ \Delta\sigma \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X\Sigma\, e - \mu e \end{pmatrix},$$

y obtenemos

$$\Delta x = \begin{pmatrix} 3.7885 \\ -0.5356 \\ 8.1126 \\ 4.8598 \\ -2.7172 \end{pmatrix}, \quad \Delta\lambda = \begin{pmatrix} 0.2450 \\ 0.2092 \\ -10.7239 \end{pmatrix}, \quad \Delta\sigma = \begin{pmatrix} 11.4231 \\ 20.7843 \\ -0.2450 \\ -0.2092 \\ 10.7239 \end{pmatrix}.$$

# Ejemplo

- Cálculo de la longitud de movimiento:

$$\alpha_P = \min_i \{-\frac{x_i}{\Delta x_i} \;/\; \Delta x_i < 0\} = -x_5/\Delta x_5 = 0.5520$$

$$\alpha_D = \min_i \{-\frac{\sigma_i}{\Delta \sigma_i} \;/\; \Delta \sigma_i < 0\} = -\sigma_3/\Delta \sigma_3 = 4.0812$$

por lo que $\alpha = \min\{1,\; 0.99999\; \min\{\alpha_P, \alpha_D\}\}$ = $0.5520$.

- Nuevo punto:

$$x = \begin{pmatrix} 2.5914 \\ 0.2043 \\ 6.9785 \\ 9.1828 \\ 0.0000 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} -0.8647 \\ -0.8845 \\ -10.9200 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 7.3060 \\ 22.4738 \\ 0.8647 \\ 0.8845 \\ 10.9200 \end{pmatrix}.$$

- Reducción del parámetro de barrera: $\mu = 0.1\mu = 1$.

## Ejemplo

- Tras 8 iteraciones más se obtiene:

$$x = \begin{pmatrix} 2.1794 \\ 0.4103 \\ 5.9486 \\ 8.3588 \\ 2 \times 10^{-8} \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} -2 \times 10^{-12} \\ -4 \times 10^{-9} \\ -1.0000 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 5 \times 10^{-8} \\ 1 \times 10^{-7} \\ 2 \times 10^{-12} \\ 4 \times 10^{-9} \\ 1.0000 \end{pmatrix}.$$

- Con esta solución se obtiene $x^T\sigma = 2 \times 10^{-7}$ por lo que el algoritmo termina.

- Observar que el punto solución no es un vértice. En este ejemplo la solución es una arista y el punto obtenido está dentro de dicha arista.

## Comentarios finales

Si es difícil encontrar un punto factible inicial se puede utilizar un punto infactible y el sistema lineal a resolver será:

$$\begin{pmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ \Sigma & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \\ \Delta \sigma \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A^T \lambda + \sigma - c \\ Ax - b \\ X\Sigma\, e - \mu e \end{pmatrix} .$$

Las implementaciones más eficientes usan técnicas “predictor-corrector”.

Un método de punto interior requiere entre 20 y 60 iteraciones incluso para problemas muy grandes. Recordar que el simplex suele necesitar entre $m$ y $3m$ iteraciones. Sin embargo, el coste computacional por iteración es mayor en el punto interior que en el simplex.

El método de punto interior apenas se ve alterado en caso de degeneración.

# Comentarios finales

- Solvers de simplex: CPLEX, LAMPS, MINOS, OSL, SOPT, XPRESS, . . .
- Solvers de punto interior: BPMPD, CPLEX, LIPSOL, LOQO, OSL, . . .
- Más información en:

http://www-fp.mcs.anl.gov/otc/Guide/SoftwareGuide/Categories/linearprog.html
http://www-unix.mcs.anl.gov/otc/Guide/faq/linear-programming-faq.html