

Nota: Las afirmaciones y los gráficos de este documento han sido extraídos de la obra cuya portada se reproduce abajo, para uso didáctico como complemento a los apuntes de una asignatura del Departamento de Estadística de la Universidad Carlos III de Madrid. El autor del libro, al que se le agradece este trabajo, no tiene ninguna responsabilidad, pero sí derechos, sobre esta recopilación de ideas.



Procesos estacionarios

Una propiedad importante de los procesos estacionarios es que son estables ante combinaciones lineales, es decir, los procesos obtenidos mediante combinaciones lineales de procesos estacionarios son también estacionarios.

Las autocorrelaciones contienen la misma información que las autocovarianzas, con la ventaja de no depender de las unidades de medida.

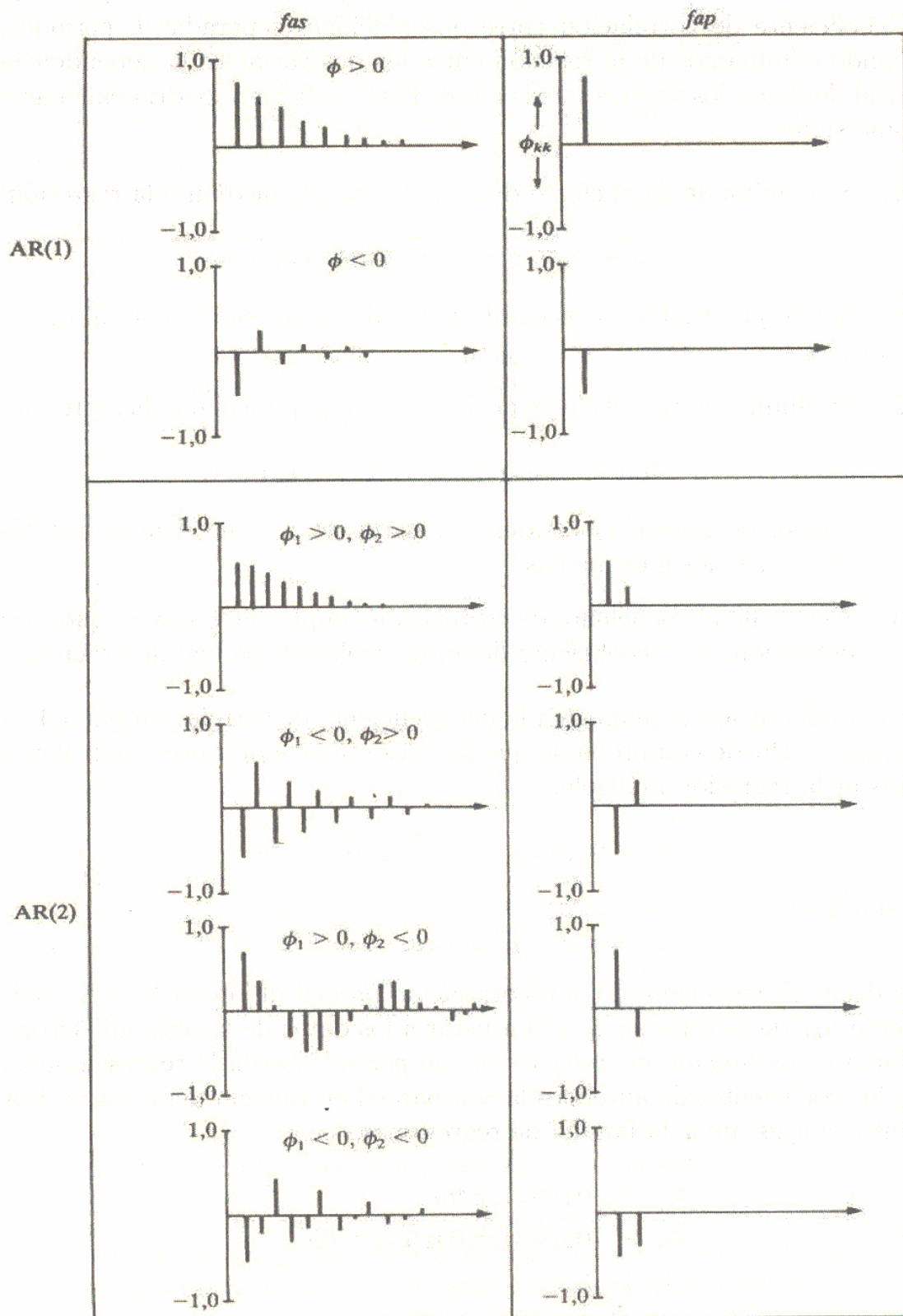
Sobre el correlograma (gráfico de la función de autocorrelación): En la práctica, con series reales cuando T (tamaño) no es muy grande podemos tener pocos términos para calcular la autocorrelación muestral de orden k y se recomienda que el orden máximo para el que se calculen autocorrelaciones muestrales sea $k_{\max} \leq T/4$. Además, se suele representar una banda o región, que proporciona aproximadamente un intervalo del 95% donde deberían estar los coeficientes, aunque algunos del restante 5% pueda salir fuera.

AR

Para que un proceso autorregresivo (AR) sea estacionario, el módulo de las raíces de la ecuación característica debe ser mayor a uno.

La función de autocorrelación simple de un proceso $AR(p)$ es una mezcla de exponenciales, debidas a los términos con raíces reales, y sinusoidales, debidas a las raíces complejas conjugadas. Su estructura puede ser, en consecuencia, muy compleja. Para determinar el orden se introduce la función de autocorrelación parcial. En el $AR(1)$ el efecto de z_{t-2} sobre z_t es siempre el que hay a través de z_{t-1} , y dado z_{t-1} , el valor de z_{t-2} es irrelevante para prever z_t . Sin embargo, en un $AR(2)$ además del efecto de z_{t-2} que se transmite a z_t a través de z_{t-1} , existe un efecto directo de z_{t-2} sobre z_t . [...] Esta idea es la clave para la utilización de la función de autocorrelación parcial.

Figura 4.7 Funciones de autocorrelación simple y parcial para procesos AR

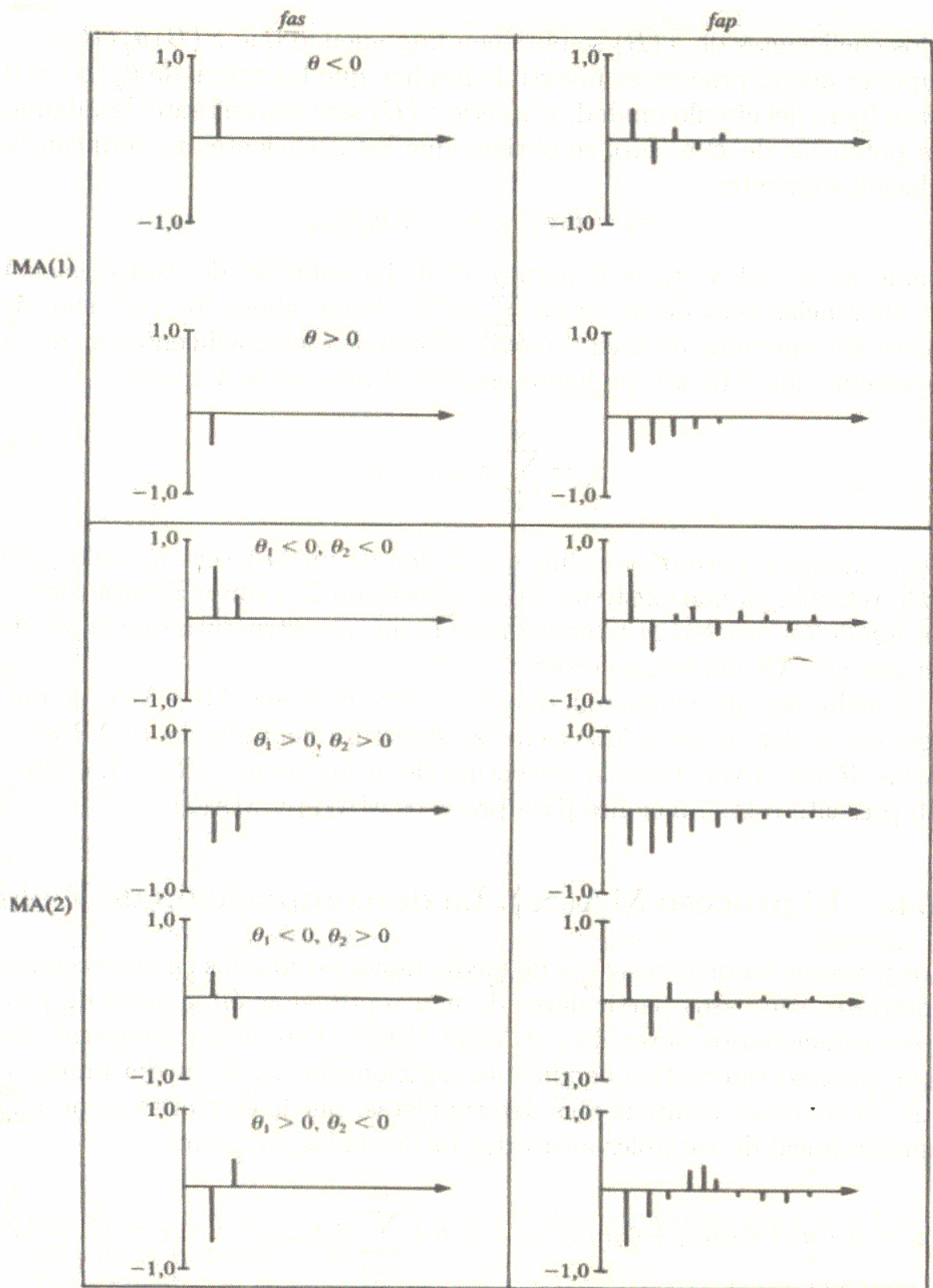


Los procesos AR tienen memoria relativamente larga, ya que el valor actual está correlado con todos los anteriores, aunque con coeficientes decrecientes. Los procesos AR no pueden representar series de memoria muy corta [...]. Una familia de procesos que tiene esta propiedad de «memoria muy corta» son los procesos de media móvil, o procesos MA de su nombre inglés, *moving average* [...].

MA

Los procesos MA, por ser suma de procesos estacionarios, son siempre estacionarios. Eso sí, si las raíces de su ecuación característica no tienen módulo mayor que la unidad, se da la paradoja de que el efecto de las observaciones pasadas aumentaría con el tiempo, lo que parece poco adecuado para representar series.

Figura 5.5 Funciones de autocorrelación simple y parcial de procesos MA



Existe una dualidad entre procesos AR y MA, de manera que la *fap* de un MA(q) tiene la estructura de la *fas* de un AR(q), y la *fas* de un MA(q) tiene la estructura de la *fap* de un AR(q).

Un proceso AR(p) puede escribirse como un proceso MA(∞), es decir, como suma infinita de innovaciones.

Un proceso MA(q) puede expresarse como un AR(∞), es decir, como suma infinita de valores anteriores de la serie.

Todo proceso estacionario en sentido débil puede expresarse como suma de infinitas variables aleatorias incorreladas (ruido), o como suma de infinitas variables anteriores.

5.5. El proceso ARMA(1, 1)

Una conclusión de la sección anterior es que los procesos AR y MA aproximan un proceso lineal general MA (∞) desde puntos de vista complementarios: los AR permiten estructura MA (∞), pero imponen restricciones sobre las pautas de decrecimiento de los coeficientes ψ_i ; los MA exigen un número de términos finito, pero a cambio no imponen restricciones sobre sus valores. Desde el punto de vista de la estructura de autocorrelación, los AR permiten muchos coeficientes distintos de cero, pero con una pauta de decrecimiento fija, mientras que los MA permiten unos pocos coeficientes distintos de cero, con valores arbitrarios. Los procesos ARMA intentan combinar estas propiedades y permiten representar de forma *escueta* (utilizando pocos parámetros) procesos cuyos primeros q coeficientes son cualesquiera, mientras que los siguientes decrecen según leyes simples.

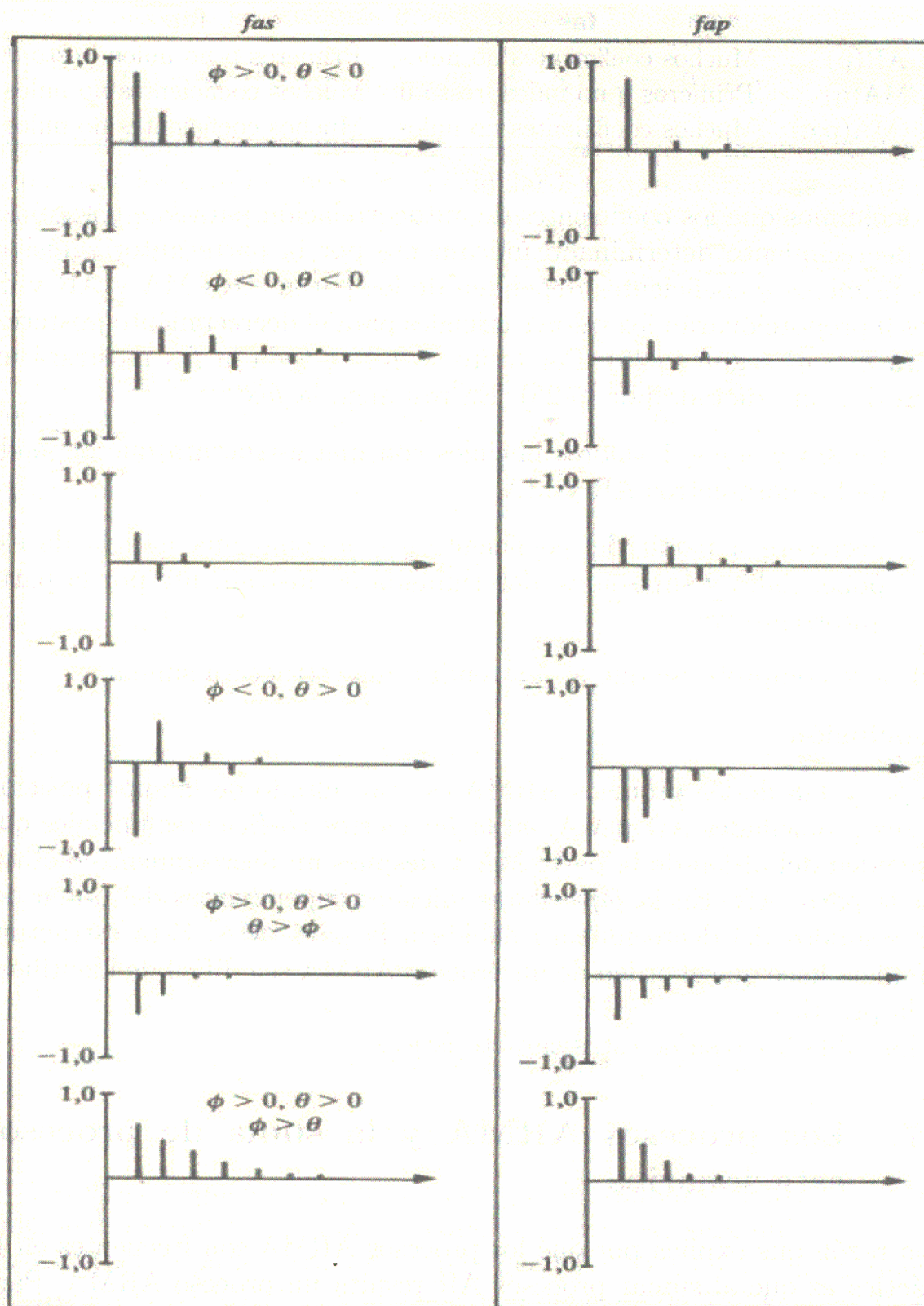
Matemáticamente, los procesos ARMA resultan de añadir estructura MA a un proceso AR o viceversa. El proceso más simple es el ARMA(1,1), que se escribe:

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1},$$

o, con notación de operadores:

$$(1 - \phi_1 B) \tilde{z}_t = (1 - \theta_1 B) a_t, \quad (5.17)$$

Figura 5.7 Funciones de autocorrelación simple y parcial para procesos ARMA(1,1)



Conclusión

La *fas* y *fap* de los procesos ARMA es el resultado de la superposición de sus propiedades AR y MA: en la *fas* ciertos coeficientes iniciales que dependen del orden de la parte MA y después un decrecimiento dictado por la parte AR. En la *fap* valores iniciales dependientes del orden del AR seguidos del decrecimiento debido a la parte MA. Esta estructura compleja hace que el orden de un proceso ARMA sea difícil de identificar en la práctica.

La tabla 5.1 resume estas características.

Tabla 5.1 Resumen de la *fas* y *fap* de procesos ARMA

	<i>fas</i>	<i>fap</i>
AR(p)	Muchos coeficientes no nulos	Primeros p no nulos, resto 0
MA(q)	Primeros q no nulos, resto 0	Muchos coeficientes no nulos
ARMA(p,q)	Muchos coeficientes no nulos	Muchos coeficientes no nulos

Una razón que explica por qué los procesos ARMA son frecuentes en la práctica es que al sumar procesos AR resulta un proceso ARMA. [...] Estos resultados sugieren que siempre que observemos procesos que sean suma de otros, y alguno de ellos tenga estructura AR, es esperable observar procesos ARMA.

La suma de procesos MA es simple: al sumar procesos MA independientes obtenemos nuevos procesos MA.

6. Procesos integrados y de memoria larga



Norbert Wiener (1894-1964)

Matemático genial nacido en Estados Unidos de padres judíos rusos. Se doctoró en Harvard a los 18 años y tras ampliar estudios en Cambridge con Russell y en Göttingen con Hilbert fue profesor de matemáticas en el MIT en Boston desde 1919 hasta su jubilación en 1959. Descubrió el movimiento browniano y desarrolló la teoría de predicción de procesos estacionarios y el análisis espectral. Inventor de la cibernética, sus aportaciones han sido muy influyentes en muchos campos científicos.

6.1. Introducción

En este capítulo comenzamos el estudio de los procesos no estacionarios.

- Un proceso puede ser no estacionario en la media, en la varianza, en las autocorrelaciones, o en otras características de la distribución de las variables. Cuando el nivel de la serie no es estable en el tiempo, pudiendo en particular tener tendencia creciente o decreciente, diremos que la serie
- 1. es no estacionaria en la media. Cuando la variabilidad o las autocorrelaciones se modifican con el tiempo, diremos que la serie es no estacionaria
- 2. en la varianza o en las autocorrelaciones. Finalmente, si la distribución de la variable en cada instante varía con el tiempo, diremos que la serie no es estacionaria en distribución. Los procesos no estacionarios más importantes son los procesos integrados, que tienen la propiedad fundamental de que al diferenciarlos se obtienen procesos estacionarios. En este
- capítulo presentaremos con detalle estos procesos. Una propiedad importante que diferencia a los procesos integrados de los estacionarios es la forma en que desaparece la dependencia con el tiempo. En los procesos

estacionarios ARMA las autocorrelaciones disminuyen geométricamente, y se hacen prácticamente cero a los pocos retardos. En los procesos integrados las autocorrelaciones disminuyen linealmente con el tiempo y es posible encontrar coeficientes de autocorrelación distintos de cero hasta para retardos muy altos.

Existe una clase de procesos estacionarios donde las autocorrelaciones disminuyen mucho más lentamente con el tiempo que en el caso de los procesos ARMA, y también que en los procesos integrados. Estos procesos se conocen como procesos de memoria larga, y en este capítulo revisaremos también brevemente sus propiedades. Veremos que estos procesos son casos particulares de la representación de Wold para procesos estacionarios, pero donde los coeficientes decrecen muy lentamente, lo que implica que las autocorrelaciones entre las observaciones también decrecen muy lentamente. Estos procesos, además de su interés teórico, pueden en la práctica aproximar bien el comportamiento observado en series largas climatológicas y financieras.

Generalizando, diremos que un proceso es integrado de orden $h \geq 0$, y lo representaremos por $I(h)$, cuando al diferenciarlo h veces se obtiene un proceso estacionario. Un proceso estacionario es, por tanto, siempre $I(0)$. En la práctica la mayoría de las series no estacionarias que son integradas tienen un orden $h \leq 3$.

Al diferenciar un proceso estacionario se obtiene otro proceso estacionario.

--

David Casado
Departamento de Estadística
Universidad Carlos III de Madrid

david.casado@uc3m.es

--

26/01/06