Corrección

Dr. Olivier Nuñez Boyer

7 de Junio del 2000

Problema 1 (5 puntos).

1. *(1.5 punto)* La verosimilitud de las observaciones se escribe

$$L(k) = \exp\left(-2\sum_{i=1}^{n} X_i + (k-1)\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i) + C(k)\right),$$

donde $C(k)$ es una constante que depende sólo de k.
Para hallar el test UMP estudiamos la razón de verosimilitud para $k' > k$:

$$\ln\left[\frac{L(k')}{L(k)}\right] = (k'-k)\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i) + C(k',k).$$

Por tanto, deducimos que el test UMP con nivel α para el contraste $H_0 : k = 1$ frente a $H_1 : k > 1$ se escribe

$$\phi = \begin{cases} 1 \text{ si } \sum_{i=1}^{n}\ln(X_i) > c_\alpha \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

2. *(1 punto)* En el caso en que $n = 1$, $\alpha = 5\%$, el test se escribe

$$\phi = \begin{cases} 1 \text{ si } \ln(X_1) > c_{5\%} \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

donde $c_{5\%}$ verifica $P\left(\ln(X_1) > c_{5\%}|H_0\right) = 5\%$. Pero, tenemos que

$$P\left(\ln(X_1) > c_{5\%}\,|H_0\right) = P\left(X_1 > \exp(c_{5\%})\,|H_0\right),$$

por tanto $P\left(X_1 > \exp(c_{5\%})\,|H_0\right) = 5\%$ implica que $\exp(c_{5\%}) = \chi^2_{1,5\%}$, puesto que bajo H_0, X_1 sigue un χ^2 con 1 grado de libertad. Por consiguiente, $c_{5\%} = \ln(\chi^2_{1,5\%}) = \ln(3.84) = 1.345$. Puesto que hemos observado $\ln X_1 = \ln 2 < 1.345$, no rechazamos H_0.

3. *(0.5 punto)* La verosimilitud de las observaciones es ahora:

$$L(\lambda, k) = \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i + (k-1) \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i) + C(k,\lambda)\right),$$

   y por consiguiente bajo H_0 $(k = 1)$ tenemos

$$L(\lambda, 1) = \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i + C(\lambda)\right).$$

   Deducimos que el estadístico suficiente y mínimo es $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

4. *(1 punto)* Tenemos que la densidad de las observaciones condicionada por $S = s$ es

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n|s) = \frac{f(s|x_1, x_2, \ldots, x_n) f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{f(s)}$$

   Puesto que S esta completamente determinado por los $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$, tenemos que

$$f(s|x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 \text{ si } s = \sum_{i=1}^{n} x_i \\ 0 \text{ si no} \end{cases}.$$

   Obtenemos que si $s = \sum_{i=1}^{n} x_i$,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n|s) &= \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{f(s)} \\ &= \frac{\exp\left[-\lambda s + (k-1)\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) + C(k,\lambda)\right]}{f(s)} \\ &= \frac{\exp\left[(k-1)\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)\right]}{C(s,k)} \end{aligned}$$

   y 0 en el caso contrario.

Esta función de densidad condicionada no depende de los parámetros bajo H_0, puesto que S es suficiente para estos parámetros bajo H_0.
Bajo H_0, tenemos que si $\sum_{i=1}^{n} x_i = s$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n|s) = 1/C(s,1)$. Entonces esta función de densidad es uniforme sobre el conjunto $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tal que $\sum_{i=1}^{n} x_i =$ y por tanto $C(s,1)$ una medida de este conjunto.

1. *(0.5 punto)* De la misma manera que en el 1., se comprueba que la razón de verosimilitud de las observaciones en el modelo condicional es creciente con respecto al estadístico $\sum_{i=1}^{n} \ln(X_i)$ y por tanto el test UMP será

$$\phi^S = \begin{cases} 1 \text{ si } \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i) > c_\alpha^S \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

2. *(0.5 punto)* La única diferencia con el test hallado en 1. es que el umbral c_α^S depende del estadístico S.

Problema II (5 puntos).

1. *(1 punto)* Puesto que $Q = \beta(2,1)$, $d_Q = E_Q(\theta) = 2/3$ y $\overline{w}_Q(d_Q) = var_Q(\theta) = 1/18$.

   (a) *(1.5 punto)* Tenemos que si $q(\theta)$ es la densidad de $Q = \beta(2,1)$,

   $$\begin{aligned} f(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta)\ q(\theta)}{C(x)} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n \left[(1-\theta)^{x_i - 1}\theta\right]\ \theta\ I_{[0,1]}(\theta)}{C(x)} \\ &= \frac{(1-\theta)^{\sum_i^n x_i - n}\ \theta^{n+1}\ \ I_{[0,1]}(\theta)}{C(x)}. \end{aligned}$$

   Entonces, la distribución *a posteriori* de θ es Beta $\beta(n+2, \sum_i^n X_i - n + 1)$.

   (b) *(1 punto)* Deducimos que $d_Q(X) = E(\theta|X) = \frac{n+2}{\sum_i^n X_i + 3}$.

   (c) *(0.5 punto)* Puesto que cada $X_i \geq 1$, tenemos de manera evidente que $\sum_{i=1}^n X_i \geq n$.
   Por otra parte

   $$\begin{aligned} E(X_i) &= E_Q\left[E(X_i|\theta)\right] \\ &= E_Q\left[\frac{1}{\theta}\right] = \int_0^1 \frac{1}{\theta} q(\theta) d\theta \\ &= 2\int_0^1 d\theta = 1. \end{aligned}$$

   Por tanto $E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E\left(X_i\right) = 2n$.

   (d) *(1 punto)* Sabemos que

   $$W_Q\left(d_Q(X)\right) = E\left[var(\theta|X)\right] = E\left[\frac{(n+2)(\sum_{i=1}^n X_i - n + 1)}{(\sum_{i=1}^n X_i + 3)^2(\sum_{i=1}^n X_i + 4)}\right]$$

   Utilizando que $\sum_{i=1}^n X_i \geq n$, obtenemos que

   $$\begin{aligned} W_Q\left(d_Q(X)\right) &\leq E\left[\frac{(n+2)(\sum_{i=1}^n X_i - n + 1)}{(n+3)^2(n+4)}\right], \\ &= \frac{(n+2)(E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] - n + 1)}{(n+3)^2(n+4)} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{(n+3)^2(n+4)}. \end{aligned}$$

Por tanto este riesgo decrece hacia 0 cuando n crece con una velocidad del orden de $1/n$. Obtenemos además que para $n \geq 11$, $W_Q\left(d_Q(X)\right) < \frac{1}{18} = \overline{w}_Q(d_Q)$. Entonces, si $n \geq 11$ estamos seguro de que $d_Q(X)$ es mejor que d_Q.