

Hoja de Ejercicios # 7

1.- Se disponen una muestra aleatoria simple de tamaño n de una distribución Pareto de parámetros θ y ν , con función de densidad:

$$f_{\theta,\nu}(x) = \frac{\theta\nu^\theta}{x^{\theta+1}} I_{\{x \geq \nu\}},$$

donde $\theta > 0$ y $\nu > 0$ son parámetros desconocidos. Se pide:

- (a) Hallar los estimadores máximo verosímiles de θ y ν .
(b) Probar que el contraste de razón de verosimilitudes para contrastar, $H_0 : \theta = 1$ frente a $H_1 : \theta \neq 1$ tiene región crítica de la forma:

$$\{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) \leq c_1 \text{ ó } T(\mathbf{x}) \geq c_2\},$$

donde $0 < c_1 < c_2$, y

$$T(\mathbf{x}) = \log \left(\frac{\prod_{i=1}^n x_i}{(\min_{1 \leq i \leq n} x_i)^n} \right).$$

2.- Sea $\theta = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ donde $\sum_{j=1}^5 p_j = 1$ y $p_j \geq 0$ para $j = 1, 2, \dots, 5$. Supongamos que X_1, X_2, \dots, X_n son variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con función de probabilidad dada por:

$$\Pr \{X_i = j\} = p_j, \text{ para } j = 1, 2, \dots, 5.$$

Halle el contraste de razón de verosimilitudes (basado en la distribución asintótica) para contrastar, $H_0 : p_1 = p_2 = p_3$ y $p_4 = p_5$ frente a $H_1 : H_0$ no es cierta.

NOTAS AUXILIARES

- En el ejercicio 2, escriba la función de verosimilitud como función de las siguientes variables: y_j : número de veces en que aparece j en la muestra x_1, x_2, \dots, x_n .
- Note que el espacio paramétrico Θ en el ejercicio 2 es de dimensión 4 pues, por ejemplo, $p_5 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4$.