Transformaciones de variables

Si X es una variable discreta e $Y = g(X)$ es una transformación, se calcula la función de probabilidad de Y mediante

$$P(Y = y) = P(g(X) = y) = P(X = g^{-1}(y)).$$

No obstante, si X es continua, es más complicada sacar una fórmula general para la densidad de Y.

Pero hay algunas reglas para la media y varianza de transformaciones lineales. Vimos antes en el Teorema 11 algunos resultados para variables discretas. que también valen para variables continuas.

Transformación lineal

Sea $Y = a + bX$ una transformación lineal. Luego se puede observar que si $F_Y(\cdot)$ es la función de distribución de Y,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(a + bX \leq y) \\ &= P\left(X \leq \frac{y-a}{b}\right) \quad \text{si } b > 0 \text{ o} \\ &= F_X\left(\frac{y-a}{b}\right) \end{aligned}$$

y se a expresado la probabilidad en términos de la función de distribución de X.

Además, existen expresiones sencillas para la media y varianza de una transformación lineal.

$$\begin{aligned} E[Y] &= a + bE[X] \\ DT[Y] &= bDT[X] \end{aligned}$$

La transformación tipificante

La transformación lineal más importante consiste en **tipificar** una variable aleatoria, X, que consiste en restarle la media y dividirla por su desviación típica.

En este caso, siendo

$$Y = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

se tiene $E[Y] = 0$ y $DT[Y] = 1$.

Sumas y diferencias de variables

Sean X e Y dos variables con medias μ_X y μ_Y . Entonces si la suma es $Z = X + Y$, e la diferencia es $S = X - Y$, se tiene

$$\begin{aligned} \mu_Z &= \mu_X + \mu_Y \\ \mu_S &= \mu_X - \mu_Y \end{aligned}$$

Se dice que dos variables X e Y son independientes si

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

para cualquier valor de x e y. En el caso de dos variables independientes, también existe una expresión sencilla para la varianza de la suma.

Si X e Y son **independientes**, se tiene

$$\begin{aligned} \sigma_Z^2 &= \sigma_S^2 \\ &= \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \end{aligned}$$

Preguntas del examen

Ejemplo 151 *(Examen de septiembre 2003) Un asesor financiero ha estimado que las ventas y los costes de algunos productos están relacionados con un índice I a través de las siguientes relaciones:*

$$\text{Costes: } C = \frac{I+5}{7}; \qquad \text{Ventas: } V = \frac{25-I}{4};$$

Si el índice I es una variable aleatoria X con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{108}, & 3 \leq x \leq 15, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

a) Calcular la función de distribución del índice I.
b) Calcular las medias y desviaciones de los costes, las ventas y los beneficios.
c) Calcular la probabilidad de que el beneficio sea negativo.

a) Sea $3 \le x \le 15$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_3^x \frac{u}{108}\, du \\ &= \left[\frac{u^2}{216}\right]_3^x \\ &= \frac{x^2-9}{216} \end{aligned}$$

Luego

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x < 3 \\ \frac{x^2-9}{216} & \textit{si } 3 \le x \le 15 \\ 1 & \textit{si } x > 15 \end{cases}$$

b) En primer lugar, necesitamos calcular la media y varianza de X.

Tenemos

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_3^{15} \frac{x}{108} \times x \, dx \\
&= \int_3^{15} \frac{x^2}{108} \, dx \\
&= \left[\frac{x^3}{324} \right]_3^{15} \\
&= \frac{15^3 - 3^3}{324} \\
&= \frac{31}{3} = 10{,}3\dot{3} \\
E\left[X^2\right] &= \int_3^{15} \frac{x^3}{108} \, dx \\
&= \left[\frac{x^4}{432} \right]_3^{15} \\
&= 117 \\
V[X] &= 117 - 10{,}3\dot{3}^2 \\
&= \frac{92}{9} = 10{,}2\dot{2}
\end{aligned}
$$

Para los costes, tenemos los siguientes resultados.

$$
\begin{aligned}
E[C] &= E\left[\frac{I+5}{7}\right] \\
&= \frac{1}{7}E[I] + \frac{5}{7} \\
&= \frac{1}{7} \times \frac{31}{3} + \frac{5}{7} \\
&= \frac{46}{21} \approx 2{,}190 \\
V[C] &= \frac{1}{7}^2 V[I] \\
&= \frac{92}{441} \approx {,}209 \\
DT[C] &= {,}456
\end{aligned}
$$

Para las ventas,

$$
\begin{aligned}
E[V] &= E\left[\frac{25-I}{4}\right] \\
&= \frac{25}{4} - \frac{1}{4}E[I] \\
&= \frac{11}{3} = 3{,}6\dot{6} \\
V[V] &= \frac{1}{16}V[I] \\
&= \frac{23}{36} = {,}63\dot{8} \\
DT[V] &\approx {,}80
\end{aligned}
$$

Los beneficios (B) son ventas menos costes $B = V - C$. Luego, podemos calcular la media de beneficios en dos maneras:

$$\begin{aligned} E[B] &= E[V] - E[C] \\ &= \frac{11}{3} - \frac{46}{21} \\ &= \frac{31}{21} \approx 1{,}48 \end{aligned}$$

Igualmente, podríamos escribir

$$\begin{aligned} B &= \frac{25 - I}{4} - \frac{I + 5}{7} \\ &= \frac{155 - 11I}{28} \\ E[B] &= \frac{155}{28} - \frac{11}{28}E[I] \\ &= \frac{31}{21} \approx 1{,}48 \end{aligned}$$

Para calcular la varianza usamos

$$\begin{aligned} V[B] &= V\left[\frac{155-11I}{28}\right] \\ &= \left(\frac{11}{28}\right)^2 V[I] \\ &\approx 1{,}58 \\ DT[B] &\approx 1{,}26 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} P(B<0) &= P\left(\frac{155-11I}{28}<0\right) \\ &= P\left(I>\frac{155}{11}\right) \\ &= 1-P\left(I\le\frac{155}{11}\right) \\ &= 1-F(14.\dot{0}\dot{9}) \\ &= 1-\frac{14.\dot{0}\dot{9}^2-9}{216}\approx ,122 \end{aligned}$$

Ejemplo 152 *El desgaste en milímetros (mm) del relieve de un neumático es una variable aleatoria X que puede tomar valores 1,2,3 y 4 mm. Se sabe que el relieve de una rueda nueva es de 4mm, por lo tanto, el máximo desgaste que puede tener es de 4 mm. La función de masa de la variable aleatoria X es la siguiente:*

$$P_X(x) = \begin{cases} m, & \text{si } x = 1 \\ \frac{mx}{3}, & \text{si } x = 2 \\ \frac{1}{6}, & \text{si } x = 3 \\ \frac{mx}{12}, & \text{si } x = 4 \end{cases}$$

a) Calcular el valor de m.

b) Hallar la función de distribución del desgaste de un neumático y dibujarla.

c) *Si el desgaste del relieve del neumático es considerable, ha de cambiarse la rueda. Se ofrece una subvención de 1.000 pts por mm no desgastado. Calcular el coste esperado de una nueva rueda, sabiendo que en el mercado una rueda vale 10.000 pts.*

d) *Se pone en vigor una nueva normativa de forma que si el desgaste de los neumáticos es mayor a una cantidad k, ha de cambiarse dicha rueda. Calcular k tal que la probabilidad de que un individuo tenga que cambiar las cuatro ruedas sea como mucho 0.1.*

Ejemplo 153 *(Examen de junio 2005) Sea la siguiente función de densidad para la variable aleatoria X:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{h} & \textit{para } 0 < x < 5 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

a) Calcular el valor de h. (0.5 puntos)

b) Calcular la esperanza y la varianza para las siguientes variables aleatorias:

i) $Y = -15 + 4X$ *(0.4 puntos)*

ii) $Z = -15 - 4X$ *(0.4 puntos)*

c) Calcular las siguientes probabilidades:

i) $P(3 < X < 4)$ (0.3 puntos)

ii) $P(Y < -3)$ (0.3 puntos)

iii) $P(Z < -27)$ (0.3 puntos)

d) ¿Cuál es el valor de b tal que $P(X > b) = \frac{61}{125}$? (0.3 puntos)