6. VARIABLES ALEATORIAS

Objetivo

Introducir la idea de una variable aleatoria y su distribución y características como media, varianza etc.

Bibliografía recomendada

Peña y Romo (1997), Capítulo 15.

Hasta ahora, hemos tratado de sucesos, por ejemplo $A =$ "la suma de dos tiradas de un dado es 7". Ahora queremos generalizar y tratar de variables, por ejemplo "la suma de las dos tiradas" o "el número de llamadas telefónicas en una hora".

Variables aleatorias

Definición 29 *Una* **variable aleatoria** *es una función que asocia un valor numérica a todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.*

Ejemplo 132 *Consideramos el experimento de lanzar un dado equilibrado dos veces. Sea $X =$ suma de las dos tiradas.*

El espacio muestral es $\{(1,1),(1,2),\ldots,(6,6)\}$ y para cada suceso elemental, podemos calcular el valor de X. Por ejemplo si el resultado del experimento es $(3,4)$ luego $X = 7$.

La tabla muestra los sucesos elementales asociados con cada posible valor de X.

x	*Sucesos elementales*					
2	$(1,1)$					
3	$(1,2)$	$(2,1)$				
4	$(1,3)$	$(2,2)$	$(3,1)$			
5	$(1,4)$	$(2,3)$	$(3,2)$	$(4,1)$		
6	$(1,5)$	$(2,4)$	$(3,3)$	$(4,2)$	$(5,1)$	
7	$(1,6)$	$(2,5)$	$(3,4)$	$(4,3)$	$(5,2)$	$(6,1)$
8	$(2,6)$	$(3,5)$	$(4,4)$	$(5,3)$	$(6,2)$	
9	$(3,6)$	$(4,5)$	$(5,4)$	$(6,3)$		
10	$(4,6)$	$(5,5)$	$(6,4)$			
11	$(5,6)$	$(6,5)$				
12	$(6,6)$					

Este es un ejemplo de una variable discreta.

Como en el ejemplo, a menudo, se denotan variables aleatorias por letras mayúsculas, por ejemplo X, y sus posibles valores con letras minúsculas, por ejemplo $X = x_1$.

Observamos que variables pueden ser **discretas**, como en el ejemplo, o **continuas**, por ejemplo el tiempo que dure mi siguiente llamada telefónica. El tratamiento de los dos tipos de variable es algo distínto.

Para variables discretas, podemos definir directamente la distribución de la variable.

La distribución de una variable aleatoria

Definición 30 *Sea X una variable aleatoria discreta con posibles valores $x_1, x_2, \ldots$. Sean $p_i = P(X = x_i)$ para $i = 1, 2, \ldots$ las correspondientes probabilidades.*

Este conjunto de probabilidades se llama **la función de probabilidad** *o* **la función de masa** *de la variable.*

Ejemplo 133 *Supongamos que el dado es equilibrado. Entonces la función de probabilidad de la variable $X =$ suma de las dos tiradas es la siguiente.*

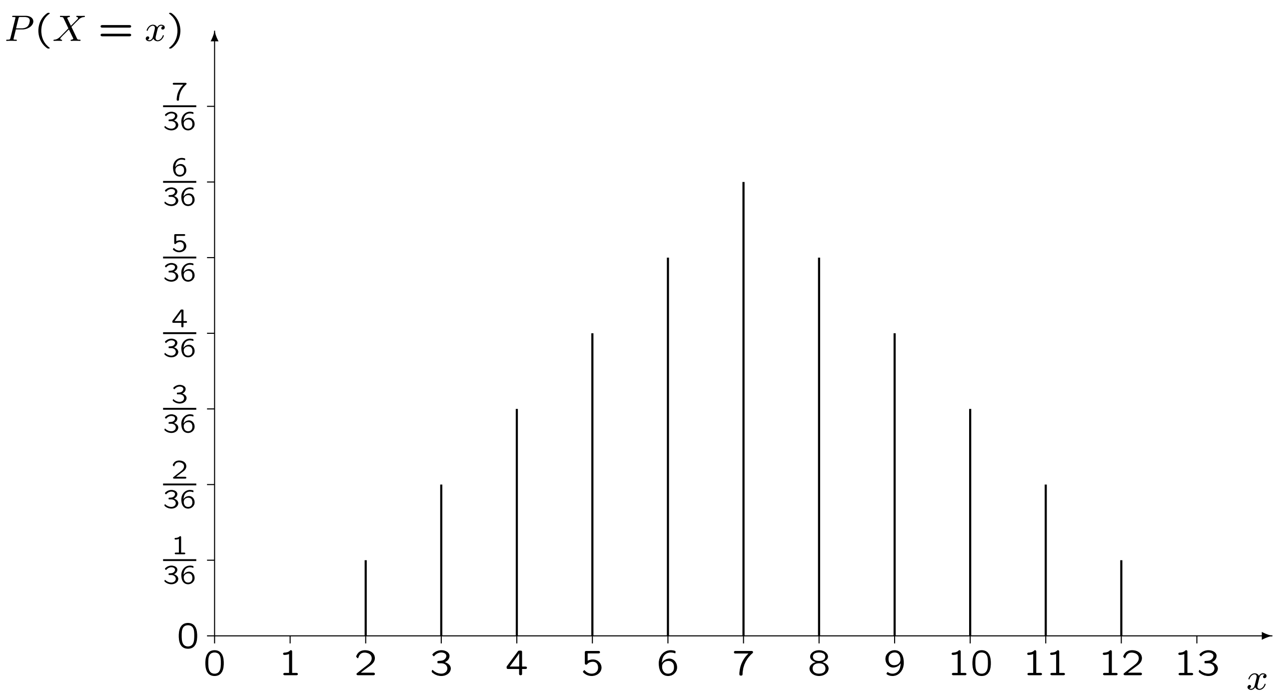
La distribución de X

La función de probabilidad de X es la siguiente:

x	$P(X = x)$
2	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{2}{36}$
4	$\frac{3}{36}$
5	$\frac{4}{36}$
6	$\frac{5}{36}$
7	$\frac{6}{36}$
8	$\frac{5}{36}$
9	$\frac{4}{36}$
10	$\frac{3}{36}$
11	$\frac{2}{36}$
12	$\frac{1}{36}$
Total	1

Para ver la forma de la distribución, es habitual dibujar la función de probabilidad.

Gráfico de la función de probabilidad de X



Vemos que la distribución es simétrica y unimodal.

Propiedades de la distribución de una variable discreta X

1. $0 \leq P(X = x_i) \leq 1$ para todos los valores x_i.

2. $\sum_i P(X = x_i) = 1$.

3. $P(X \leq x) = \sum_{i,\, x_i \leq x} P(X = x_i)$.

4. $P(X > x) = 1 - P(X \leq x)$.

Ejemplo 134 *Volviendo al Ejemplo 132, hallamos las siguientes probabilidades.*

1. *la suma es menos o igual a 4.*

2. *la suma es entre* 6 *y* 8 *inclusive.*

3. *la suma es mayor de* 3.

1. *Queremos* $P(X \leq 4)$

$$\begin{aligned} P(X = 4) &= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) \\ &= \frac{7}{36}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P(6 \leq X \leq 8) &= P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) \\ &= \frac{16}{36}. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= 1 - P(X \leq 3) \\ &= 1 - \{P(X = 2) + P(X = 3)\} \\ &= \frac{33}{36}. \end{aligned}$$

Ejemplo 135 *En ocasiones, algunas lineas aéreas venden más pasajes que los disponibles en un vuelo. Una compañia ha vendido 205 billetes que corresponden a un avión con 200 plazas. Sea X la variable aleatoria que expresa el número de viajeros que se presentan en el aeropuerto para viajar en el avión. La distribución de X es*

x	198	199	200	201	202	203	204	205
$P(X = x)$	,05	,09	,15	,20	,23	,17	,09	,02

Hallar la probabilidad de que todos los pasajeros que llegan a tomar el vuelo tengan plaza.

¿Cuál es la probabilidad de que se quede sin plaza alguno de los pasajeros que se presentan en el aeropuerto?

Ejemplo tomado de Peña y Romo (1997).

Queremos calcular $P(X \leq 200)$.

$$\begin{aligned} P(X \leq 200) &= P(X = 198) + P(X = 199) \\ &\quad + P(X = 200) \\ &= ,05 + ,09 + ,15 \\ &= ,29 \end{aligned}$$

La probabilidad de que todos los pasajeros tengan viaje es ,29.

Igualmente, la probabilidad de que se quede sin viaje algún pasajero es

$$P(X > 200) = 1 - P(X = 200) = ,71.$$

La función acumulada de distribución

Definición 31 *La* **función (acumulada) de distribución** *de una variable X es la función $F(x) = P(X \leq x)$.*

Para una variable discreta, la función de distribución es una función escalón, es decir que tiene las siguientes propiedades:

1. $F(-\infty) = 0$

2. $F(\infty) = 1$

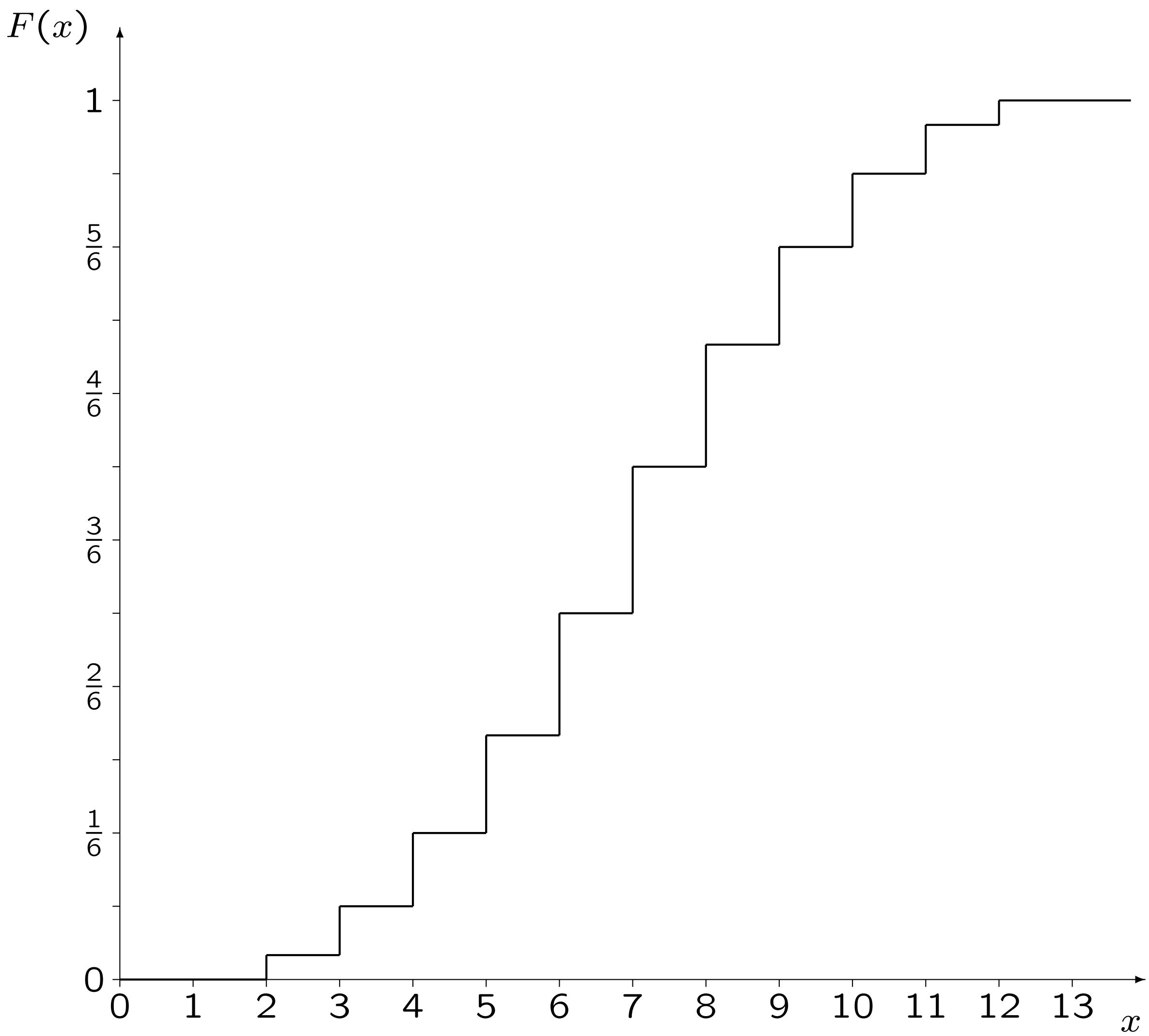
3. $F(x) \leq F(x + \epsilon)$ para cualquier $\epsilon > 0$.

Ejemplo 136 *Volviendo al Ejemplo 132, tabulamos la función acumulada de distribución.*

x	$P(X=x)$	$F(x)$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$
4	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$
5	$\frac{4}{36}$	$\frac{10}{36}$
6	$\frac{5}{36}$	$\frac{15}{36}$
7	$\frac{6}{36}$	$\frac{21}{36}$
8	$\frac{5}{36}$	$\frac{26}{36}$
9	$\frac{4}{36}$	$\frac{30}{36}$
10	$\frac{3}{36}$	$\frac{33}{36}$
11	$\frac{2}{36}$	$\frac{35}{36}$
12	$\frac{1}{36}$	1
Total	1	$--$

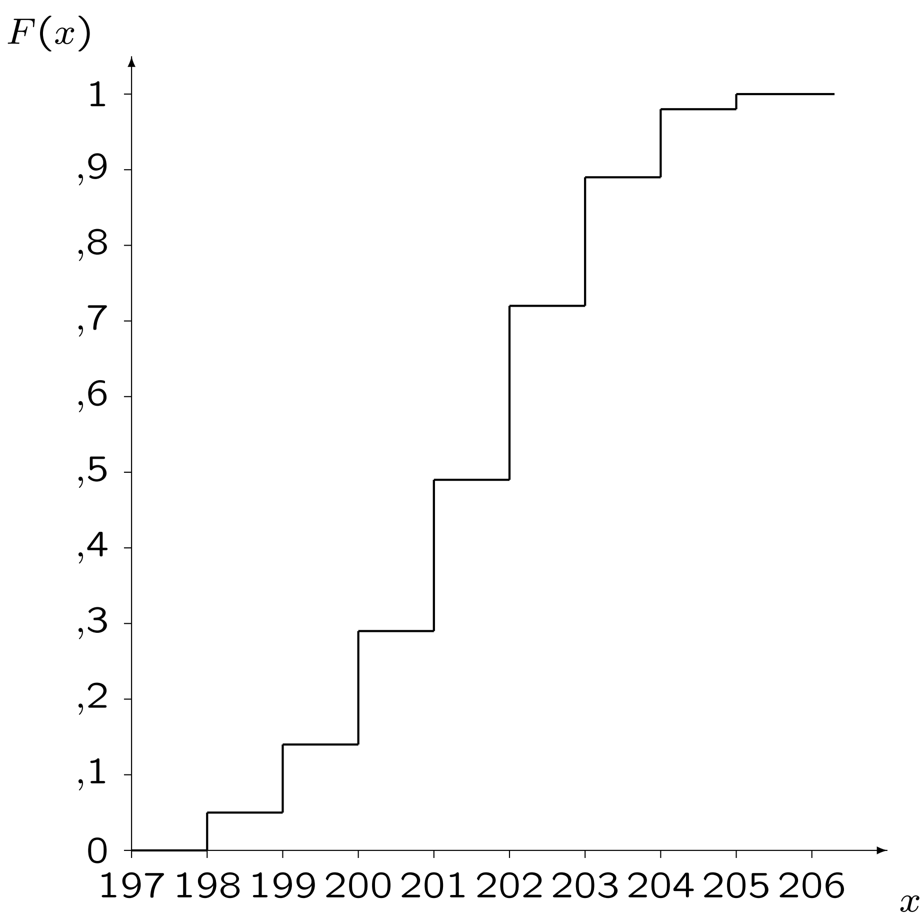
Construimos un gráfico de la función de distribución.

Gráfico de la función acumulada de distribución de X



Ejemplo 137 *En el Ejemplo 135, tenemos*

x	198	199	200	201	202	203	204	205
$P(X=x)$	,05	,09	,15	,20	,23	,17	,09	,02
$F(x)$	,05	,14	,29	,49	,72	,89	,98	1



Media o esperanza de una variable discreta

Supongamos que se repite un experimento (tirar un dado 2 veces) n veces y que se observan los resultados (suma de las dos tiradas) cada vez. Supongamos que se observa n_i repeticiones del valor x_i.

Luego, la media muestral es

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i n_i x_i = \sum_i f_i x_i$$

donde f_i es la proporción de veces que ha ocurrido x_i.

Si supongamos un número infinito de repeticiones, tenemos $f_i \to P(X = x_i)$ y

$$\bar{x} \to E[X] = \sum_i P(X = x_i) \times x_i$$

Luego $E[X]$ es una medida de localización de la distribución de X.

Definición 32 *La* **esperanza** *o* **media** *de una variable aleatoria discreta X es*

$$E[X] = \sum_i P(X = x_i) \times x_i$$

A menudo, también se utiliza la letra griega μ para representar la media de X.

Ejemplo 138 *Volvemos al Ejemplo 132.*

La media de X es

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{1}{36} \times 2 + \frac{2}{36} \times 3 + \\ &\quad \frac{3}{36} \times 4 + \ldots + \\ &\quad \frac{2}{36} \times 11 + \frac{1}{36} \times 12 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Ejemplo 139 *En el Ejemplo sobre los pasajeros, el número medio de pasajeros que llegan al aeropuerto es*

$$\begin{aligned} \mu &= ,05 \times 198 + ,09 \times 199 + \\ & \quad \ldots + ,02 \times 205 \\ &= 201{,}44 \end{aligned}$$

Observamos que la media no siempre es uno de los valores posibles de X.

Esperanza de una función de X

Definición 33 *Sea $g(X)$ una función de X. Luego la esperanza de $g(X)$ es*

$$E[g(X)] = \sum_i P(X = x_i) \times g(x_i)$$

Ejemplo 140 *En el Ejemplo 135 supongamos que la compañia aréa recibe 250 euros por cada billete que vende pero que tiene que devolver el precio del ticket y además pagar una multa de 1000 euros a cada pasajero que no puede montar en el avión.*

Calcular la cantidad de dinero que espera cobrar la compañia en este vuelo.

Sea $g(X)$ *las ganancias de la compañia.*

Las ventas totales de tickets son $250 \times 205 = 51250$ *euros.*

Si llegan $x \leq 200$ *personas entonces* $g(x) = 51250$*. Si llegan* $x > 200$ *personas,* $g(x) = 51250 - (x - 200) * (1250)$*.*

Entonces

$$
\begin{aligned}
E[g(X)] &= 51250 \times ,05 + 51250 \times ,09 + \\
&\quad 51250 \times ,15 + \\
&\quad (51250 - (201 - 200) * 1250) \times ,20 + \\
&\quad (51250 - (202 - 200) * 1250) \times ,23 + \\
&\quad \ldots \\
&\quad + (51250 - (205 - 200) * 1250) \times ,02 \\
&= 49212{,}5 \text{ euros}
\end{aligned}
$$

En particular tenemos los siguientes resultados

Teorema 11

$$\begin{aligned}
E[c] &= c \quad \textit{para una constante } c \\
E[bX] &= bE[X] \\
E[g(X)+h(X)] &= E[g(X)]+E[h(X)] \\
E[a+bX] &= a+bE[X]
\end{aligned}$$

Demostración

$$\begin{aligned}
E[c] &= \sum_i P(X=x_i)\times c \\
&= c\times\sum_i P(X=x_i) \\
&= c\times 1 = c \\
E[bX] &= \sum_i P(X=x_i)\times (bx_i) \\
&= b\times\sum_i P(X=x_i)\times x_i \\
&= bE[X]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E[g(X)+h(X)] &= \sum_i P(X=x_i)\times(g(x_i)+h(x_i)) \\
&= \sum_i P(X=x_i)\times g(x_i)+ \\
&\quad \sum_i P(X=x_i)\times h(x_i) \\
&= E[g(X)]+E[h(X)]
\end{aligned}
$$

El último resultado es consecuencia de los demás. $\diamond$

Ejemplo 141 *Volvemos al Ejemplo 135. Supongamos que cada pasajero que se presenta al aeropuerto compra una bebida para 2 euros. Calcular las ganancias en promedio recibido por Coca Cola©.*

Queremos $E[2X] = 2 \times E[X] = 2 \times 201{,}44 = 402{,}88$ *euros.*

Varianza y desviación típica

Recordamos que la desviación típica muestral es una medida de la desviación de la muestra en torno de la media. Podemos definir de manera semejante la desviación típica de una variable.

Definición 34 *La* **varianza** *de una variable X que tiene media μ es*

$$V[X] = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_i P(X = x_i) \times (x_i - \mu)^2.$$

La desviación típica es $DT[X] = \sqrt{V[X]}$.

A menudo se escribe σ^2 para representar la varianza y σ para la desviación típica.

Ejemplo 142 *Retomamos el Ejemplo sobre los dados. Tenemos*

$$\begin{aligned} V[X] &= \frac{1}{36} \times (2-7)^2 + \frac{2}{36} \times (3-7)^2 + \\ &\quad \ldots + \frac{1}{36} \times (12-7)^2 \\ &= 6{,}38\dot{8} \approx 6{,}389 \end{aligned}$$

La desviación típica es

$$DT[X] = \sqrt{6{,}38\dot{8}} \approx 2{,}53.$$

Es lioso calcular la varianza así. Existe una manera más fácil

Teorema 12 *La varianza de X es*

$$
\begin{aligned}
V[X] &= E\left[X^2\right] - E[X]^2 \\
&= \sum_i P(X = x_i) \times x_i^2 - E[X]^2
\end{aligned}
$$

Demostración

$$
\begin{aligned}
V[X] &= E\left[(X - E[X])^2\right] \\
&= E\left[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2\right] \\
&= E\left[X^2\right] - 2E[X]E[X] + E[X]^2 \\
&= E\left[X^2\right] - E[X]^2
\end{aligned}
$$

$\diamond$

Ejemplo 143 *En el Ejemplo 135,*

$$
\begin{aligned}
E[X^2] &= ,05 \times 198^2 + \ldots + \\
&\quad ,02 \times 205^2 \\
&= 40580,88 \\
\sigma^2 &= E[X^2] - \mu^2 = 40580,88 - 201,44^2 \\
&= 2,8064
\end{aligned}
$$

Luego la desviación típica es $\sigma \approx 1,675$ *pasajeros.*