4. SERIES TEMPORALES Y NÚMEROS ÍNDICE

Objetivo

Estudiar la evolución de una variable en el tiempo.

Bibliografia recomendada

Peña y Romo (1997). Capítulos 11 y 12.

Índice

1. Representación gráfica de una serie temporal
2. Componentes de una serie:
   a) tendencia
   b) estacionalidad
3. Números índice

Series Temporales: Introducción

Una **serie temporal** es una serie de observaciones de una variable tomadas en varios instantes de tiempo.

Se interesa por los cambios en la variable con respeto al tiempo.

Ejemplos de series temporales provienen de muchos campos.

En economía: precios de acciones semanales, ganancias mensuales de la empresa.

En meteorología: cantidad de lluvia diária.

En sociología: niveles de desempleo, número de crimenes.

Representación gráfica de una serie temporal

A menudo, se representa la serie en un **gráfico temporal**, con el valor de la serie en el eje de ordenadas y los tiempos en el eje de abscisas.

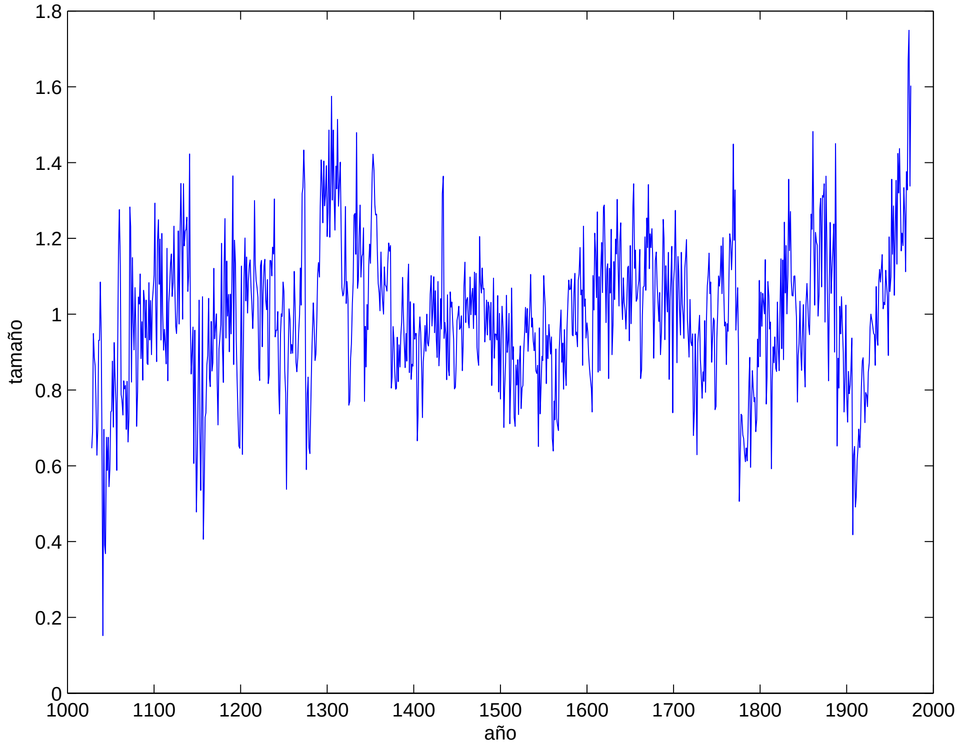
Ejemplo 89 *Los datos son los tamaños relativos de los anillos de crecimiento cada año de una especie de arbol (*pino lapiz*) en Australia, con datos desde el año 1028 a 1975.*

El siguiente gráfico muestra los cambios en el tiempo de la serie. No vemos ninguna relación obvia con el tiempo.

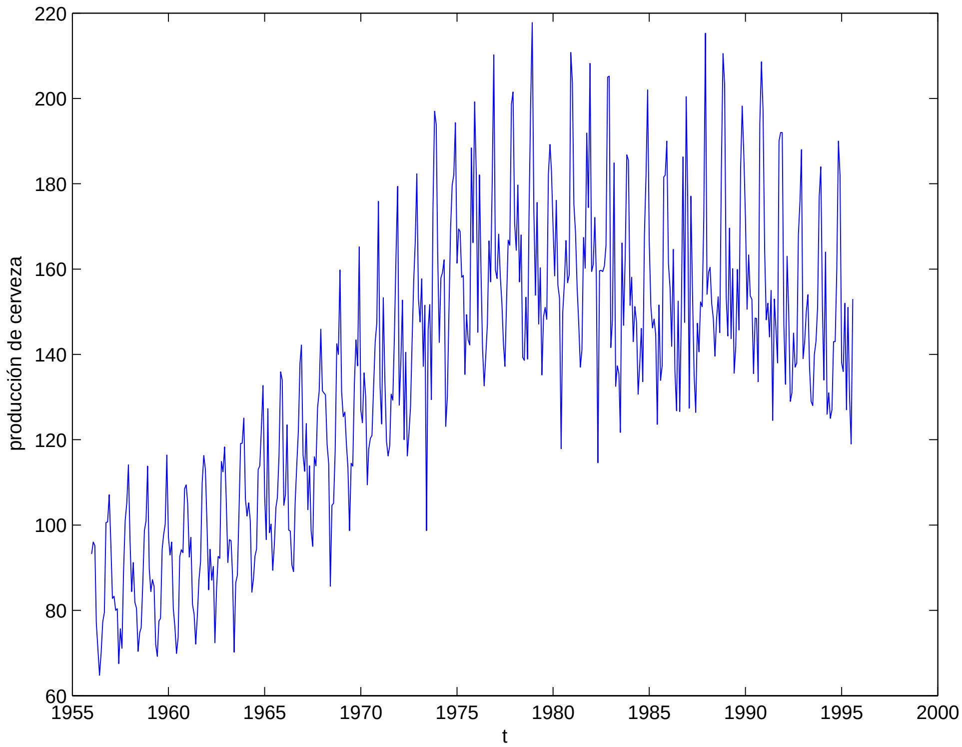
Datos sacados del Time Series Data Library

`http://www-personal.buseco.monash.edu.au/~hyndman/TSDL/`

El gráfico temporal



Ejemplo 90 *El siguiente gráfico ilustra la producción mensual de cerveza en Australia desde 1956 hasta 1995.*



Se ve una **tendencia** *creciente hasta finales de los 70 y un fuerte efecto* **estacional**.

Clasificación de series temporales

Una serie es **estacionaria** si la media y la variabilidad son más o menos constantes a lo largo del tiempo.

Una serie es **no estacionaria** si la media y/o la variabilidad cambian a lo largo del tiempo.

Series no estacionarias pueden mostrar una **tendencia**, es decir que la media crece o baja a lo largo del tiempo.

Además, pueden presentar **efectos estacionales**, es decir que el comportamiento de la serie es parecido en ciertos tiempos periodicos en el tiempo.

Por ejemplo, cada diciembre y enero suben las ventas de juguetes.

Componentes de una Serie

En muchos casos, se supone que el valor de la serie está compuesta de una tendencia, un componente estacional y una parte irregular o estacionaria, es decir que si $\{X_t\}$ representa la sucesión de observaciones de la serie, luego:

$$X_t = T_t + S_t + I_t$$

valor observado = Tendencia+Estacionalidad+Irregular

En estos casos, es interesante estimar los distíntos componentes.

Análisis de la Tendencia

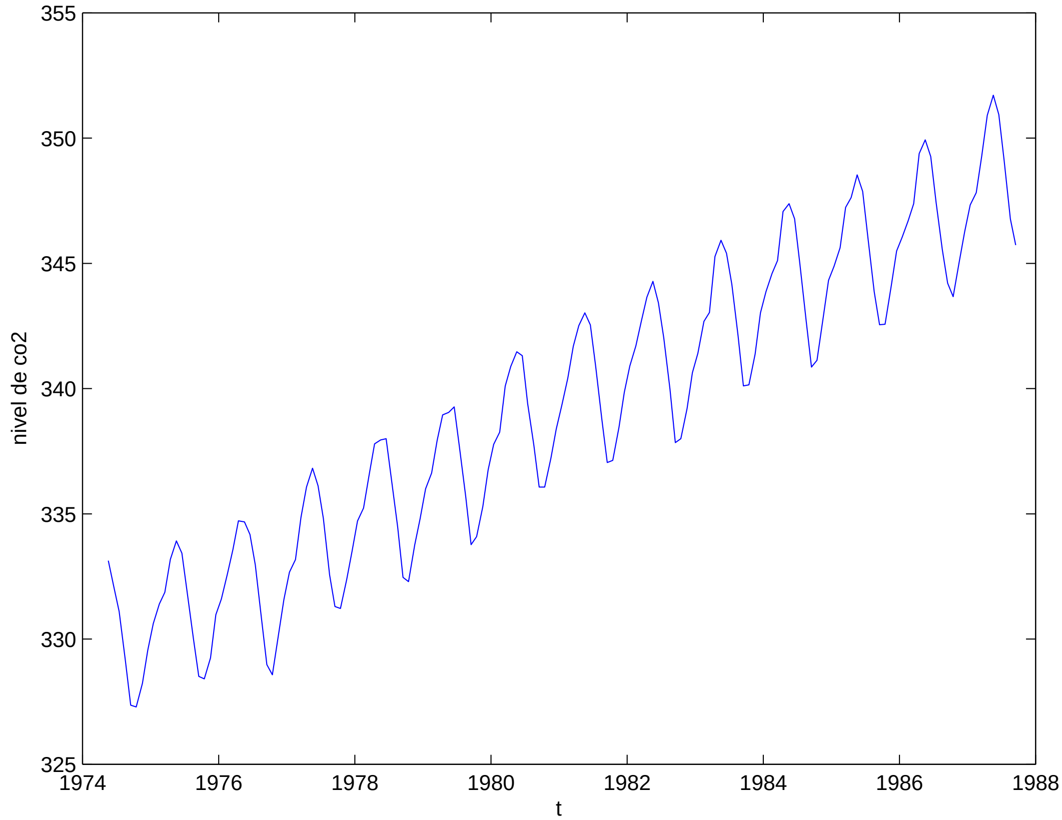
En algunos casos, se puede suponer una relación determinísta o fija entre T_t y t, por ejemplo una tendencia lineal

$$T_t = a + bt$$

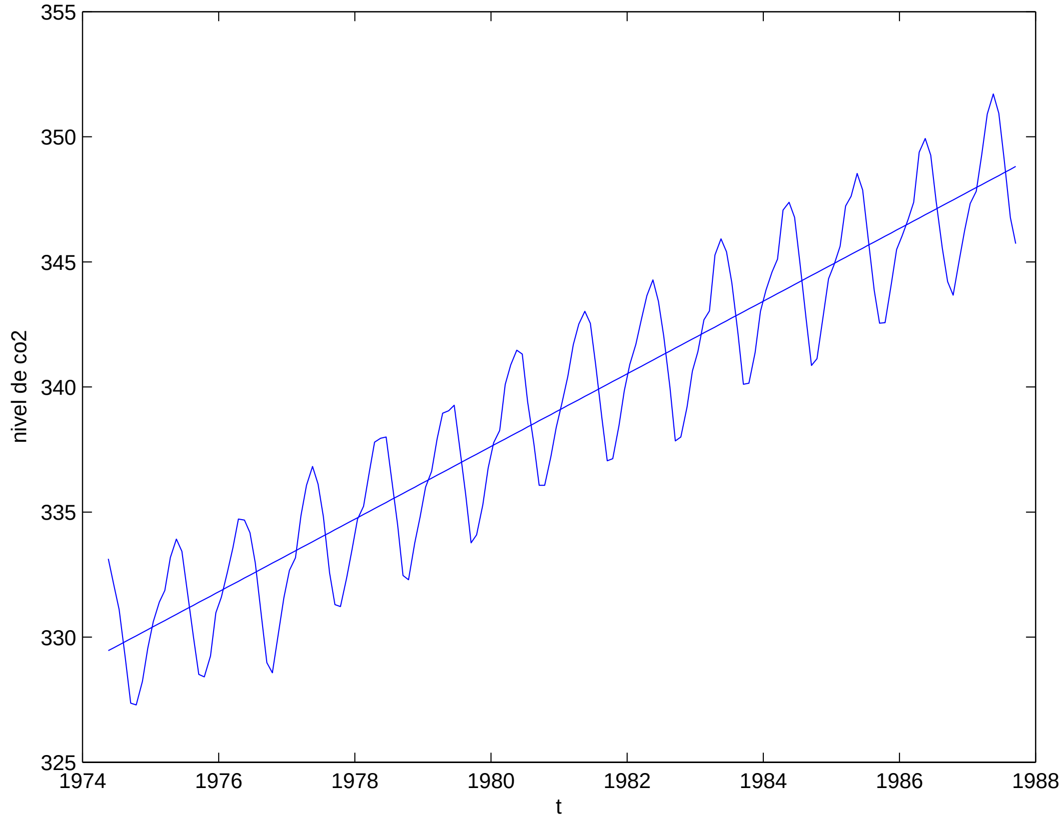
que se estima mediante el método de mínimos cuadrados.

Ejemplo 91 *Los siguientes datos son los niveles de concentración mensuales de dioxido de carbon en el observatorio de Muana Loa entre 1974 y 1987.*

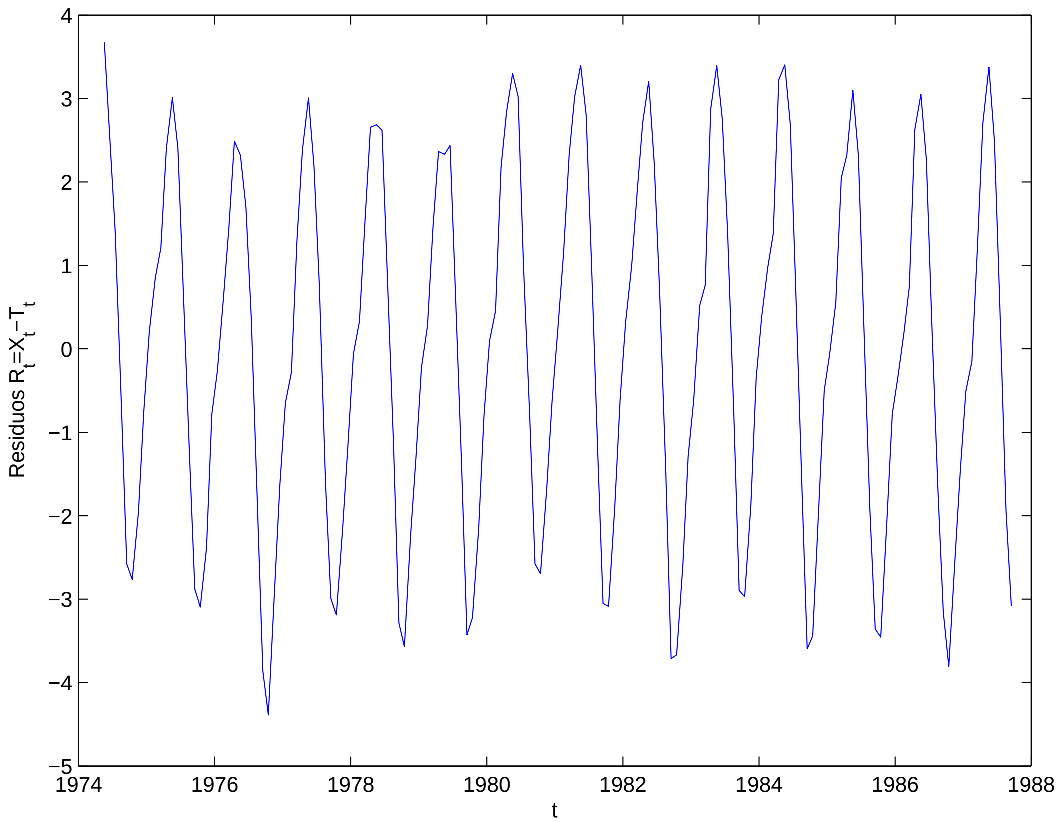
Thoning, K., Tans, P. y Komhyr, W. (1989). *Journal of Geophysical Research*, **94**, 8549-8565.



Se ve una clara tendencia creciente lineal, además de efectos estacionales. El siguiente gráfico ilustra el ajuste de la recta de regresión.



Hacemos un gráfico de los residuos $X_t - T_t$ *frente al tiempo después de eliminar la tendencia.*



Todavía se ve un claro efecto estacional en los residuos.

Tendencia evolutiva

A menudo, la tendencia de la serie no sigue una recta y evoluciona a lo largo del tiempo. En este caso, un método general de estimar la tendencia es de suponer que T_t es una función que evoluciona lentamente en el tiempo, y que se puede aproximar con una función sencilla en intervalos cortos del tiempo. Un método es aplicar una media móvil.

Definición 21 *Para tiempo t, se define* **la media móvil** *de la serie* **de orden 3** *como*

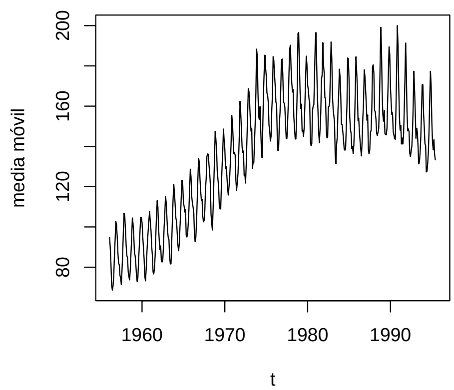
$$m_t = \frac{x_{t-1} + x_t + x_{t+1}}{3}.$$

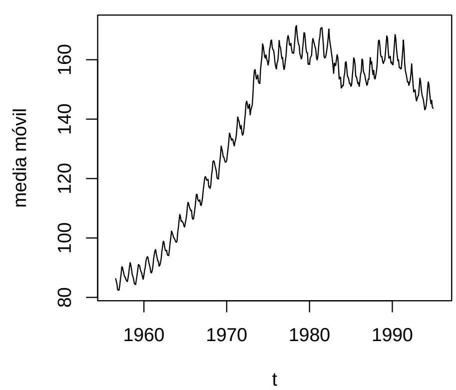
Luego, la tendencia T_t es

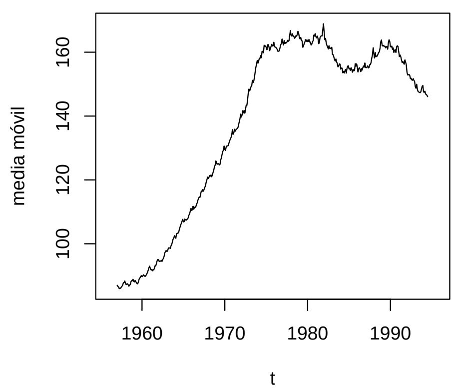
$$T_t = m_t + \frac{I_{t-1} + I_t + I_{t+1}}{3}.$$

Obviamente es posible calcular medias móviles de ordenes más altos. Cómo crece el orden, el valor de m_t cambia más suavemente.

Ejemplo 92 *Retomamos el Ejemplo 90 sobre producción de cerveza. Se ve que la tendencia no es lineal. Ajustamosla con medias móviles de ordenes* 3, 15 *y* 25 *respetivamente.*







Con medias móviles de ordenes altos, suavizamos los efectos estacionales.

Diferenciación de la serie

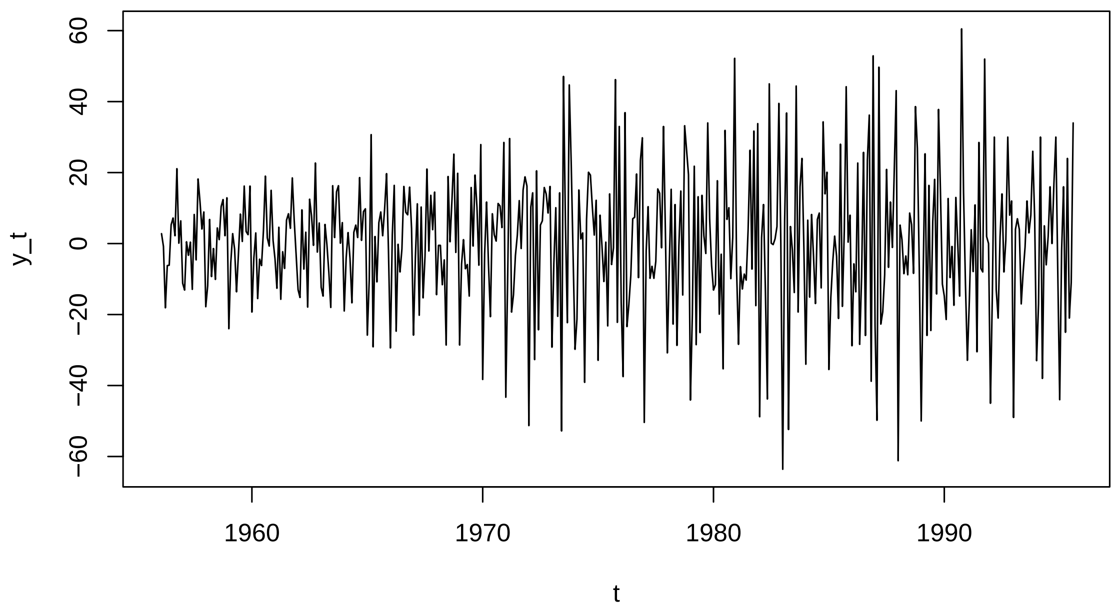
Es el método más general de tratar la tendencia. Se supone que la tendencia evoluciona lentamente en el tiempo tal que la tendencia en el instante t es próxima a la tendencia en el instante $t-1$. Luego se construye una nueva serie temporal

$$y_t = x_t - x_{t-1}$$

que se denomina la **serie diferenciada**.

Diferenciar la serie así equivale a suponer que la tendencia en el instante t es $T_t = x_{t-1}$.

Ejemplo 93 *Construimos una serie diferenciada para los datos del Ejemplo 90.*



La serie diferenciada no tiene tendencia.

Análisis de la estacionalidad

Si los datos son mensuales y se piensa que existe un efecto estacional, un método de estimar el efecto es construyendo una tabla de doble entrada de la siguiente forma:

		Año					
		1	2	$\cdots$	n	Medias	S
mes	enero	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n}	$\bar{x}_{1\cdot}$	S_1
	febrero	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2n}	$\bar{x}_{2\cdot}$	S_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	noviembre	$x_{11\,1}$	$x_{11\,2}$	$\cdots$	$x_{11\,n}$	$\bar{x}_{11\cdot}$	S_{11}
	diciembre	$x_{12\,1}$	$x_{12\,2}$	$\cdots$	$x_{12\,n}$	$\bar{x}_{12\cdot}$	S_{12}
	Medias	M_1	M_2	$\cdots$	M_n	M	

Aqui M es la media de todos los datos en la serie.

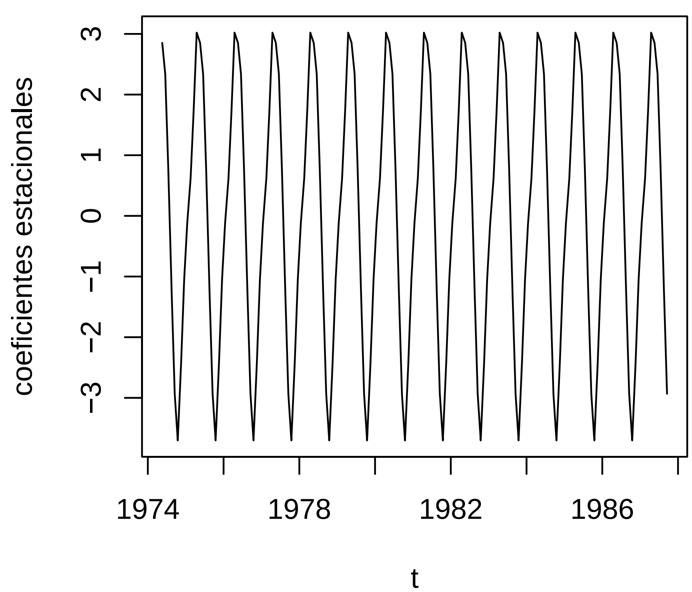
Los coeficientes estacionales son $S_i = \bar{x}_{i\cdot} - M$ para $i = 1, \ldots, 12$.

Ahora, el efecto estacional S_t cumple con

$$S_t = S_{t+12} = S_{t+24} = \ldots$$

Ejemplo 94 *Volvemos al Ejemplo 91. Aquí tenemos datos anuales y parece que existen efectos estacionales.*

El gráfico muestra la serie de coeficientes estacionales.

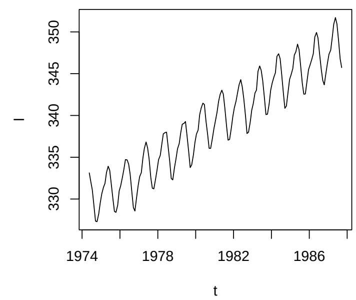


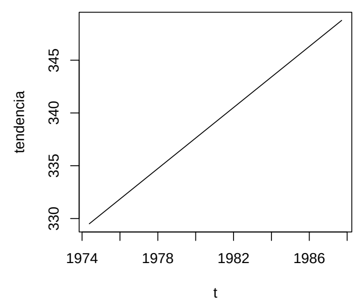
Descomposición de la serie en componentes

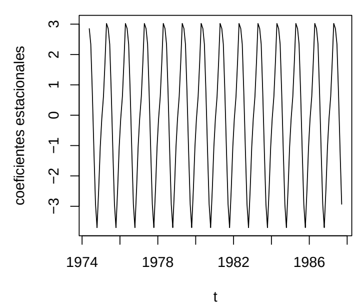
Se muestra la serie original y las estimaciones de la tendencia, la parte estacional y la parte irregular.

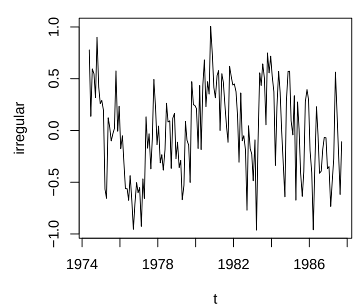
Ejemplo 95 *Retomando el Ejemplo 91, tenemos el siguiente gráfico.*

Vemos que el componente irregular parece aproximadamente estacionario.


350
345
340
335
330
l
1974
1978
1982
1986
t


345
340
335
330
tendencia
1974
1978
1982
1986
t


3
2
1
0
−1
−2
−3
coeficientes estacionales
1974
1978
1982
1986
t


1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
irregular
1974
1978
1982
1986
t

Pregunta del examen

Ejemplo 96 *(Examen de septiembre 2005)*

Los datos que se presentan a continuación, referentes a estudios universitarios, se han obtenido de las bases de datos del Instituto de Estadística de la Comunidad de Madrid:

Matriculados	203980	193728	195605	193594	190679	179383	177858	177317
Graduados	26436	24622	27086	26362	37562	36183	34815	–
Curso	94/95	95/96	96/97	97/98	98/99	99/00	00/01	01/02

a) *Realizar un gráfico de los datos.*

(0,5 puntos).

b) *Los datos de matriculados muestran un decrecimiento según el tiempo avanza. Eliminar esta tendencia de forma determinista y realizar un nuevo gráfico.*

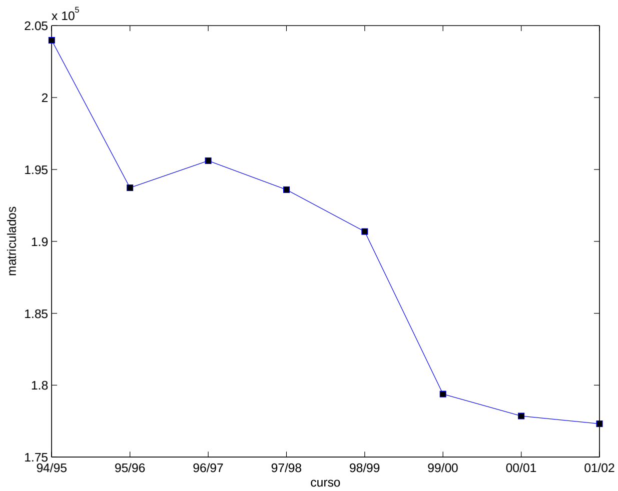
(1 punto)

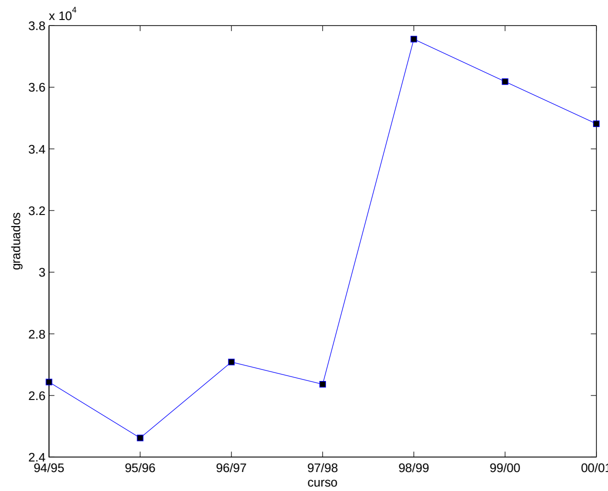
c) *En los datos de graduados tenemos una situación contraria a la anterior. Eliminar la tendencia diferenciando ahora la serie y realizar después el nuevo gráfico.*

(1 punto)

Es una pregunta difícil (¡y bastante mal escrita!).

a) *¿Qué gráfico quieren que hacemos? Ponemos dos gráficos de matriculados y graduados frente al tiempo*





b) *En este caso ajustamos un modelo de regresión $y = a + bx$ donde y es el número de matriculados y x es el curso. Observamos que lo más fácil es definir los valores de x como 0 para el curso 94/95 hasta 7 para el curso 01/02.*

Tenemos $\bar{x} = 3{,}5$, $s_x^2 = 5{,}25$, $\bar{y} = 189018$, $s_y^2 = 83428000$ *y* $s_{xy} = -19848$. *Luego:*

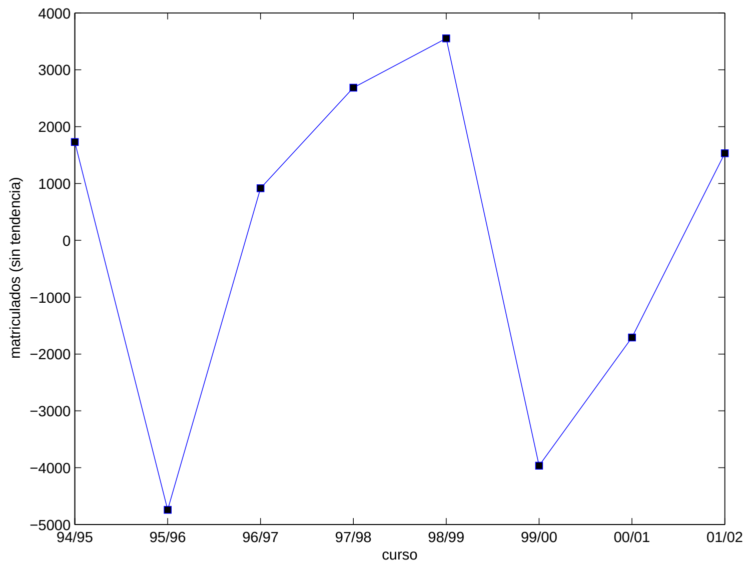
$$\begin{aligned} b &= \frac{-19848}{83428000} = -3780{,}6 \\ a &= 202250 \end{aligned}$$

y la recta de regresión ajustada es $y = 202250 - 3780{,}6x$.

Ahora calculamos los residuos:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	203980	193728	195605	193594	190679	179383	177858	177317
$\widehat{y}$	202250	198470	194689	190912	187128	183347	17956	175786
$y-\widehat{y}$	1723	-4742	916	2686	3551	-3964	-1709	1531

y hacemos un gráfico de los residuos, es decir los números de matriculados menos la tendencia, frente a x.



c) *En este caso, calculamos una serie de primeras diferencias.*

x	0	1	2	3	4	5	6
y	26346	24622	27086	26362	37562	36183	34815
$y_i - y_{i-1}$	$--$	-1814	2464	-724	11200	-1379	-1368