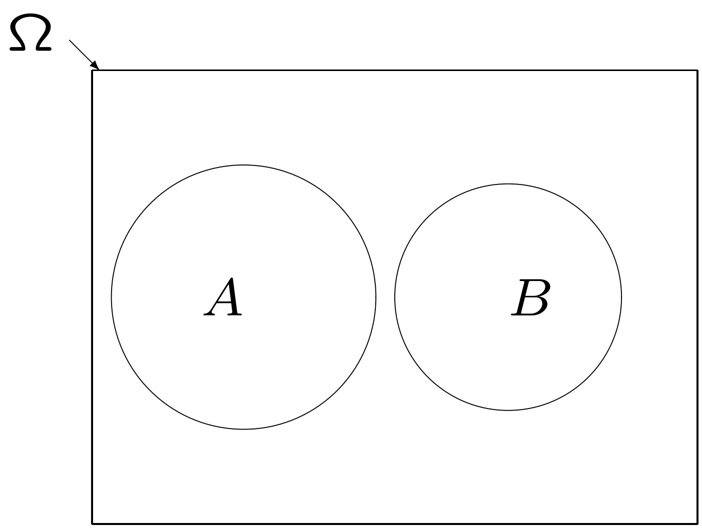
La probabilidad $P(A \text{ o } B)$

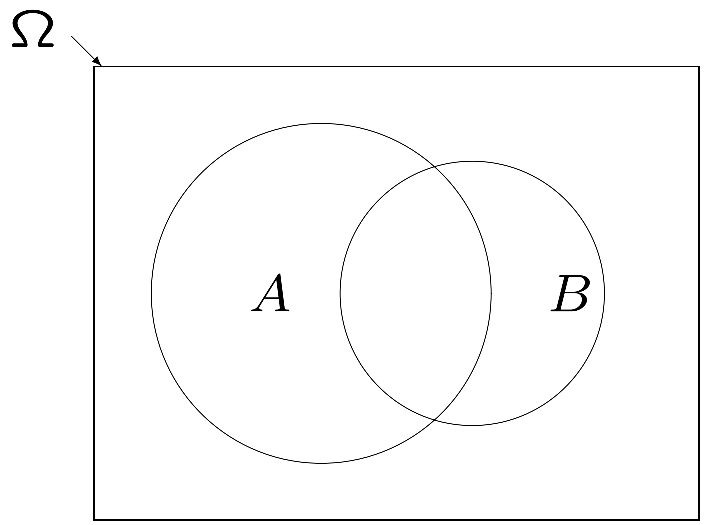
Si A y B son sucesos incompatibles, tenemos el siguiente diagrama de Venn.



La área en A o B es igual a la suma de las dos áreas. Entonces, interpretando probabilidad como área, concluimos que

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B).$$

En el caso más general, tenemos el siguiente diagrama Venn.



Vemos que la área contenida en el suceso A o B es igual a la área en A más la área en B menos la área en A y B. Entonces, tenemos la fórmula general.

Para dos sucesos A y B, se tiene **la ley de adición**:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$$

Observamos también que se tiene $P(A \text{ y } B) \leq$ mín$\{P(A), P(B)\}$ y $P(A \text{ o } B) \geq$ máx$\{P(A), P(B)\}$.

Ejemplo 115 *Supongamos que se lanza un dado equilibrado dos veces. Sea A el suceso de que la suma de las dos tiradas es* 6 *y B el suceso de que la diferencia absoluta entre las dos tiradas es igual a* 2.

El espacio muestral es $\Omega = \{(1,1),(1,2)\ldots,(6,6)\}$ *contiene 36 sucesos elementales equiprobables. Luego*

$$\begin{aligned} A &= \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\} \\ B &= \{(1,3),(2,4),(3,1),(3,5),(4,2),(4,6),(5,3),(6,4)\}. \end{aligned}$$

Entonces $P(A) = \frac{5}{36}$ *y* $P(B) = \frac{8}{36}$.

Directamente, tenemos

$$\begin{aligned} A \text{ o } B \;=\; &\{(1,3),(1,5),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5), \\ &(4,2),(4,6),(5,1),(5,3),(6,4)\} \end{aligned}$$

y luego $P(A \text{ o } B) = \frac{11}{36}$.

Además A *y* $B = \{(2,4),(4,2)\}$ *que implica que* $P(A \text{ y } B) = \frac{2}{36}$.

Entonces, aplicando la fórmula

$$\begin{aligned} P(A \text{ o } B) &= P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B) \\ &= \frac{5}{36} + \frac{8}{36} - \frac{2}{36} = \frac{11}{36} \end{aligned}$$

Ejemplo 116 *Hay 15 clínicas en una ciudad. De ellas, 6 no cumplen las reglas sanitarias y 8 no cumplen los requisitos de seguridad. 5 clínicas no cumplen ni los requisitos de seguridad ni las reglas sanitarias.*

Si se elige una clínica para inspeccionar **al azar**, *¿cuál es la probabilidad de que cumpla ambos reglamientos?*

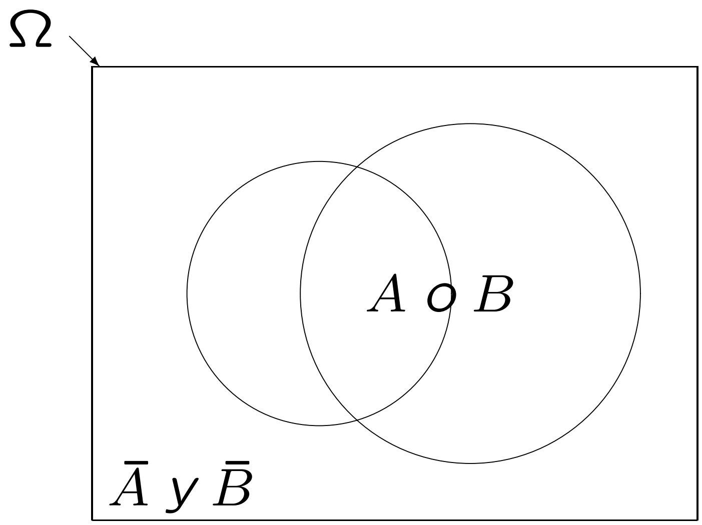
Sea A el suceso de que cumple las reglas sanitarias y B el suceso de que cumple los requisitos de seguridad.

Si elegimos una clínica al azar, tenemos

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= \frac{6}{15} \\ P(\bar{B}) &= \frac{8}{15} \\ P(\bar{A} \text{ y } \bar{B}) &= \frac{5}{15} \end{aligned}$$

Deducimos que $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{9}{15}$ y también que $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = \frac{7}{15}$.

Ahora miramos el diagrama de Venn.



Observamos que $(A \text{ o } B) \cup (\bar{A} \text{ y } \bar{B}) = \Omega$ *y también los dos sucesos son incompatibles. Luego*

$$P(A \text{ o } B) = 1 - P(\bar{A} \text{ y } \bar{B}) = \frac{10}{15}$$

Ahora necesitamos calcular $P(A \text{ y } B)$.

Recordamos que

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$$

que implica que $P(A \text{ y } B) = \frac{9}{15} + \frac{7}{15} - \frac{10}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

Ejemplo 117 *Una empresa de venta por correo ofrece un regalo sorpresa a todos los clientes quienes hacen compras 20 euros o más. Hay cinco tipos de regalo sorpresa que se eligen al azar:*

1. *llavero y navajita*

2. *bolígrafo y linterna*

3. *abrecartas y linterna*

4. *navajita y abrecartas*

5. *bloc de notas y abrecartas*

Si un cliente hace dos compras de más de 20 euros y recibe dos regalos, ¿cuáles son el espacio muestral y los sucesos elementales?

Sea i el suceso de que recibe el regalo sorpresa número i para $i = 1, \ldots, 5$. El espacio muestral es

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots, (4,5), (5,5)\}$$

donde (i,j) significa que con la primera pedida recibe el regalo i y con la segunda pedida recibe el regalo j.

La probabilidad de cada suceso elemental es $\frac{1}{25}$.

Hallar las probabilidades de los siguientes sucesos:

- A *el cliente recibe (por lo menos) una linterna*

- B *el cliente recibe (por lo menos) una abrecartas*

- A *y* B *el cliente recibe (por lo menos) una abrecartas y una linterna.*

$$
\begin{aligned}
A &= \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),\\
&\quad (2,5),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),\\
&\quad (4,2),(4,3),(5,2),(5,3)\}
\end{aligned}
$$

y luego $P(A) = \frac{16}{25}$.

Igualmente, recibe una abrecartas con reglos 3, 4, 5 *es decir que no recibe una abrecartas con los regalos* 1 *y* 2.

$$\bar{B} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

y entonces $P(\bar{B}) = \frac{4}{25}$ *y* $P(B) = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$.

Consideramos A *o* B.

$$
\begin{aligned}
P(A \text{ o } B) &= 1 - P(\overline{A \text{ o } B})\\
&= 1 - P(\{(1,1)\}) = \frac{24}{25}
\end{aligned}
$$

Ahora

$$\begin{aligned} P(A \text{ o } B) &= P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B) \\ \frac{24}{25} &= \frac{16}{25} + \frac{21}{25} - P(A \text{ y } B) \\ P(A \text{ y } B) &= \frac{13}{25} \end{aligned}$$

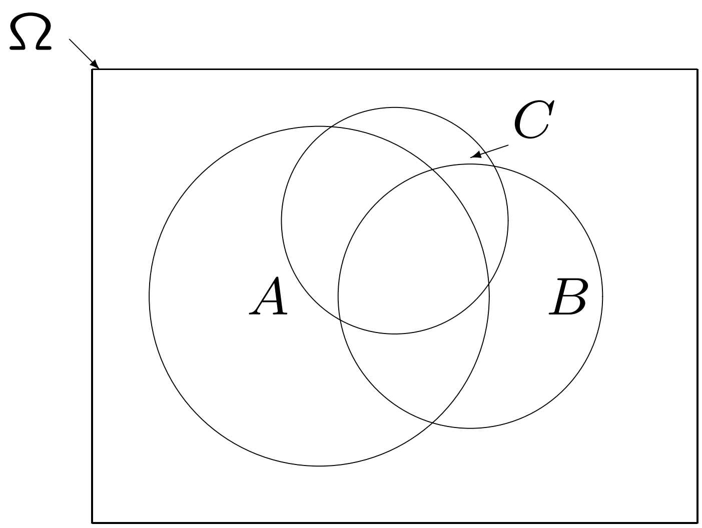
Ejemplo 118 *Sea $P(A) = 0{,}6$ y $P(B) = 0{,}5$. ¿Pueden A y B ser sucesos incompatibles?*

¡No! Si son incompatibles,

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$$

pero en este caso, $P(A) + P(B) = 1{,}1$ y las probabilidades tienen que ser entre 0 y 1. Luego por mínimo, $P(A \text{ y } B) \geq 0{,}1$.

Una extensión $P(A \textbf{ o } B \textbf{ o } C)$



Pensamos en probabilidad como si fuera area.

$$
\begin{aligned}
P(A \text{ o } B \text{ o } C) \;\; = \;\; & P(A) + P(B) + P(C) - \\
& P(A \text{ y } B) - P(B \text{ y } C) - P(A \text{ y } C) \\
& + P(A \text{ y } B \text{ y } C)
\end{aligned}
$$

Probabilidad condicionada

Ejemplo 119 *Se clasifica un grupo de 100 ejecutivos en acuerdo con su peso y si tienen hipertensión. La tabla de doble entrada muestra el número de ejecutivos en cada categoría.*

	insuficiente	normal	sobrepeso	Total
hipertenso	02	08	10	20
normal	20	45	15	80
Total	22	53	25	100

Si se elige un ejecutive al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga hipertensión (H)?

Hay 20 ejecutivos con hipertensión y luego

$$P(H) = \frac{20}{100} = 0{,}2.$$

Igualmente, la probabilidad de que tenga sobrepeso (S) es $P(S) = \frac{25}{100} = 0{,}25$.

Se elige una persona al azar del grupo y se descubre que tiene sobrepeso. ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona sea hipertenso?

Escribimos $P(H|S)$ para representar la probabilidad de que sea hipertenso sabiendo que sobra peso.

Para calcular $P(H|S)$, las primeras dos columnas de la tabla son irrelevantes.

Hay 25 ejecutivos gordos y de ellos, 10 son hipertensos. Luego $P(H|S) = \frac{10}{25} = 0{,}4$.

Observamos también que $P(H \text{ y } S)$, la probabilidad de que una persona elegida al azar sea gordo y hipertenso es $P(H \text{ y } S) = \frac{10}{100} = 0{,}1$.

Observamos entonces que

$$P(H|S) = \frac{P(H \text{ y } S)}{P(S)}.$$

Definición 26 *Para dos sucesos A y B, se define la* **probabilidad condicionada** *de A dado B como*

$$P(A|B) = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(B)}.$$

Se entiende la expresión como la probabilidad de A suponiendo que B haya ocurrido.

A menudo se escribe esta fórmula de otra manera

$$P(A \text{ y } B) = P(A|B)P(B).$$

En este caso, se llama la fórmula la **ley de multiplicación**.

Ejemplo 120 *Sea* $P(R) = 0{,}68$, $P(S) = 0{,}55$ *y* $P(R \text{ y } S) = 0{,}32$. *Hallar:*

a $P(S|R)$.

$$P(S|R) = \frac{P(S \text{ y } R)}{P(R)} = \frac{0{,}32}{0{,}68} \approx 0{,}4706$$

b $P(\bar{S}|R)$.

$$P(\bar{S}|R) = \frac{P(\bar{S} \text{ y } R)}{P(R)}.$$

$R = (R \text{ y } S) \cup (R \text{ y } \bar{S})$ *y luego,*

$$P(R) = P(R \text{ y } S) + P(R \text{ y } \bar{S})$$

que implica $P(R \text{ y } \bar{S}) = 0{,}68 - 0{,}32 = 0{,}36$. *Entonces,* $P(\bar{S}|R) = \frac{0{,}36}{0{,}68} \approx 0{,}5294$.

Había una manera mucho más fácil de hacer el cálculo.

$$P(\bar{S}|R) = 1 - P(S|R) = 1 - 0{,}4706 = 0{,}5294$$

c $P(\bar{S}|\bar{R})$

$$\begin{aligned}
P(\bar{S}|\bar{R}) &= \frac{P(\bar{S} \text{ y } \bar{R})}{P(\bar{R})} \\
P(\bar{R}) &= 1 - P(R) = 0{,}32 \\
P(\bar{S} \text{ y } \bar{R}) &= 1 - P(S \text{ o } R) \quad \text{y} \\
P(S \text{ o } R) &= P(S) + P(R) - P(S \text{ y } R) \\
&= 0{,}68 + 0{,}55 - 0{,}32 = 0{,}91 \\
P(\bar{S} \text{ y } \bar{R}) &= 0{,}09 \\
P(\bar{S}|\bar{R}) &= \frac{0{,}09}{0{,}32} = 0{,}28125
\end{aligned}$$

Ejemplo 121 *Se dan dos cartas de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas cartas sean copas?*

Sea A *(*B*) el suceso de que la primera (segunda) carta sea copa. Queremos* $P(A \text{ y } B)$.

Usamos la ley de multiplicación.

$$P(A \text{ y } B) = P(B|A)P(A)$$

Ahora $P(A) = \frac{10}{40}$ *y* $P(B|A) = \frac{9}{39}$ *porque si la primera carta es copa, quedan 39 cartas, nueve de ellos siendo copas.*

Luego $P(A \text{ y } B) = \frac{10}{40} \times \frac{9}{39} = \frac{3}{52}$.

Ejemplo 122 *Una urna contiene tres balas rojas y dos verdes. Se quitan dos balas sin reemplazamiento.*

¿Cuál es la probabilidad de que la primera bala sea verde (A)*?*

$P(A) = \frac{2}{5}$.

Observamos también que $P(\bar{A}) = \frac{3}{5}$.

¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bala quitada sea verde (B)*?*

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \text{ y } A) + P(B \text{ y } \bar{A}) \\ &= P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A}) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Independencia

Definición 27 *Se dicen que dos sucesos A y B son* **independientes** *si $P(A \text{ y } B) = P(A)P(B)$.*

Igualmente, A y B son independientes si $P(A|B) = P(A)$ o si $P(B|A) = P(B)$.

Ejemplo 123 *En el Ejemplo 122, A y B no son independientes.*

$$P(B) = \frac{2}{5} \neq P(B|A) = \frac{1}{4}$$