9. INTRODUCCIÓN A DISTRIBUCIONES MULTIVARIANTES

Objetivo

Introducir la idea de la distribución conjunta de dos variables discretas. Generalizar las ideas del tema 2. Introducir la distribución normal bivariante.

En esta sección se trata de la distribución conjunta de dos variables. Veremos un ejemplo.

Ejemplo 182 *Se lanzan tres monedas distíntas con probabilidades de cara de* 0,5, 0,4 *y* 0,3 *respectivamente. Sean X el número de caras (C) en las primeras dos monedas e Y el número de cruces (c) en las últimas dos lanzadas.*

Los posibles resultados del experimento, sus probabilidades y los valores de las variables X e Y son los siguientes.

Resultado	*Prob.*	X	Y
$\{C, C, C\}$	0,06	2	0
$\{C, C, c\}$	0,14	2	1
$\{C, c, C\}$	0,09	1	1
$\{C, c, c\}$	0,21	1	2
$\{c, C, C\}$	0,06	1	0
$\{c, C, c\}$	0,14	1	1
$\{c, c, C\}$	0,09	0	1
$\{c, c, c\}$	0,21	0	2

Hacemos una tabla de doble entrada mostrando la distribución conjunta de las dos variables.

La distribución conjunta de X e Y

Definición 43 *Para dos variables discretas X e Y, la distribución conjunta de X e Y es el conjunto de probabilidades $P(X = x, Y = y)$ para todos los posibles valores de x e y.*

$$
\begin{array}{cc|ccc|c}
 & & & Y & & \\
 & & 0 & 1 & 2 & \\
\cline{3-5}
 & 0 & 0{,}00 & 0{,}09 & 0{,}21 & \\
X & 1 & 0{,}06 & 0{,}23 & 0{,}21 & \\
 & 2 & 0{,}06 & 0{,}14 & 0{,}00 & \\
\cline{3-5}
\multicolumn{5}{c}{} & 1
\end{array}
$$

Observamos que

$$\sum_x \sum_y P(X = x, Y = y) = 1.$$

Las distribuciones marginales de X e Y

$$
\begin{array}{cc|ccc|c}
 & & & Y & & \\
 & & 0 & 1 & 2 & \\
\hline
 & 0 & 0{,}00 & 0{,}09 & 0{,}21 & 0{,}3 \\
X & 1 & 0{,}06 & 0{,}23 & 0{,}21 & 0{,}5 \\
 & 2 & 0{,}06 & 0{,}14 & 0{,}00 & 0{,}2 \\
\hline
 & & 0{,}12 & 0{,}46 & 0{,}42 & 1{,}0
\end{array}
$$

La **distribución marginal** *de* X *es*

$$
P(X = x) = \begin{cases} 0{,}3 & \text{si } x = 0 \\ 0{,}5 & \text{si } x = 1 \\ 0{,}2 & \text{si } x = 2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}
$$

Observamos que

$$
P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)
$$

La distribución condicionada

La distribución condicionada de Y *dado* $X = 2$ *es*

$$P(Y = y|X = 2) = \begin{cases} 0{,}3 & \textit{si } y = 0 \\ 0{,}7 & \textit{si } y = 1 \\ 0 & \textit{si no} \end{cases}$$

Observamos que $P(Y = y|X = x) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(X=x)}$.

La media condicionada es

$$E[Y|X = 2] = 0{,}3 \times 0 + 0{,}7 \times 1 = 0{,}7$$

Independencia

Definición 44 *Se dicen que dos variables (discretas) X e Y son independientes si*

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

para todos los valores de x e y.

Esta definición equivale a decir que

$$\begin{aligned} P(X = x|Y = y) &= P(X = x) \quad \text{o} \\ P(Y = y|X = x) &= P(Y = y) \end{aligned}$$

para todos los valores de x e y.

En nuestro ejemplo, X e Y no son independientes.

Covarianza y correlación

Definición 45 *Para dos variables X e Y, la* **covarianza** *entre X e Y es*

$$Cov[X,Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])$$

A menudo, se escribe σ_{XY} para representar la covarianza.

En la práctica, normalmente, se evalua la covarianza a través de otra fórmula equivalente.

Teorema 22

$$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

Se calcula $E[XY] = \sum_x \sum_y xyP(X = x, Y = y)$.

Ejemplo 183 *Volvemos al Ejemplo. Tenemos:*

$$
\begin{aligned}
E[X] &= 0 \times 0{,}3 + 1 \times 0{,}5 + 2 \times 0{,}2 \\
&= 0{,}9 \\
E[Y] &= 0 \times 0{,}12 + 1 \times 0{,}46 + 2 \times 0{,}52 \\
&= 1{,}5 \\
E[XY] &= 0 \times 0 \times 0{,}00 + 0 \times 1 \times 0{,}09 + \ldots \\
& \quad + 2 \times 1 \times 0{,}14 + 2 \times 2 \times 0 \\
&= 0{,}93 \\
Cov[X,Y] &= 0{,}93 - 0{,}9 \times 1{,}5 \\
&= -0{,}42
\end{aligned}
$$

Una medida sin unidades es la correlación.

Definición 46 *La* **correlación** *entre X e Y es*

$$Corr[X,Y] = \frac{Cov[X,Y]}{DT[X]DT[Y]}$$

A menudo, se escribe ρ_{XY} para representar la correlación y entonces $\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$.

Ejemplo 184 *Tenemos*

$$\begin{aligned}
E\left[X^2\right] &= 0^2 \times 0{,}3 + 1^2 \times 0{,}5 + 2^2 \times 0{,}2 \\
&= 1{,}3 \\
V[X] &= 1{,}3 - 0{,}9^2 = 0{,}49 \\
DT[X] &= 0{,}7 \\
E\left[Y^2\right] &= 0^2 \times 0{,}12 + 1^2 \times 0{,}46 + 2^2 \times 0{,}52 \\
&= 2{,}54 \\
V[Y] &= 2{,}54 - 0{,}93^2 = 1{,}6751 \\
DT[Y] &\approx 1{,}294 \\
Corr[X,Y] &= \frac{-0{,}42}{0{,}7 \times 1{,}294} \approx -0{,}464
\end{aligned}$$

Hay una relación negativa entre las dos variables.

Propiedades de la correlación

1. $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$

2. La correlación es igual a 1 si y sólo si existe una relación lineal positiva entre X e Y, es decir
$$Y = \alpha + \beta X$$
donde $\beta > 0$.

3. La correlación es -1 si y sólo si existe una relación lineal negativa
$$Y = \alpha - \beta X$$
donde $\beta < 0$.

4. Si X e Y son independientes, $\rho_{XY} = 0$.

El último resultado no es verdad al revés. Existen variables incorreladas pero dependientes.

Variables continuas

Para dos variables continuas, se puede definir la función de distribución conjunta

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

y la función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y)$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x, y)\, dx\, dy &= F(x, y) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy &= 1 \end{aligned}$$

Se calcula la distribución condicionada, media, covarianza etc. de manera semejante al cálculo para variables discretas pero sustituyendo integrales por sumatorios donde sea necesario.

Ejemplo 185 *Verificar que la siguiente función bivariante es una densidad*

$$f(x, y) = 6xy^2, \qquad 0 < x < 1, 0 < y < 1,$$

En primer lugar observamos que $f(x, y) \geq 0$ *y en segundo lugar, debemos comprobar que la densidad integra a 1.*

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 6xy^2 dxdy &= \int_0^1 6x \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 dx \\ &= \int_0^1 6x\frac{1}{3}dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1. \end{aligned}$$

Las densidades marginales

La densidad marginal de X *es*

$$f(x) = \int f(x,y)\,dy$$

Luego tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 6xy^2\,dy \\ &= \left[6x\frac{y^3}{3}\right]_0^1 \\ &= 2x \quad \textit{para } 0 < x < 1 \end{aligned}$$

Igualmente, la densidad marginal de Y *es*

$$\begin{aligned} f(y) &= \int_0^1 6xy^2\,dx \\ &= \left[6\frac{x^2}{2}y^2\right]_0^1 \\ &= 3y^2 \quad \textit{para } 0 < y < 1 \end{aligned}$$

Observamos que

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 6xy^2 \\ &= 2x \times 3y^2 \\ &= f(x)f(y) \end{aligned}$$

Luego X e Y son **independientes**.

Entonces sabemos que

$$\begin{aligned} f(x|y) &= f(x) \\ f(y|x) &= f(y) \\ Cov[X,Y] &= 0 \end{aligned}$$

La distribución normal bivariante

La distribución **normal** bivariante es la más importante de las variables aleatorias continuas bivariantes. Una variable aleatoria bivariante (X, Y) que sigue una distribución normal bivariante se carateriza por un vector de medias,

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix},$$

y una matriz de varianzas y covarianzas,

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}.$$

Si X e Y tienen una distribución normal bivariante, se escribe $(X, Y) \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Propiedades de la distribución normal bivariante

1. Las distribuciones marginales de X y de Y son normales.

2. Las distribuciones condicionadas son normales.

3. Si la covarianza es cero, entonces X e Y son independientes.

4. Cualquier transformación lineal,

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz, es normal.

El siguiente gráfico muestra la función de densidad conjunta de una distribución normal bivariante estandár, con media $\boldsymbol{\mu} = (0, 0)^T$ y matriz de varianzas y covarianzas $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}$.