CAPÍTULO 4. MODELOS GAUSSIANOS

Para leer

Gelman et al (1995) Capítulo 3, Secciones 3.1 – 3.4, 3.6 y 3.8.
Box y Tiao (1973), Capítulo 2, Secciones 2.1 – 2.5.
Lee (1997), Capítulo 2, Capítulo 5, Secciones 5.1–5.4.

En este capítulo, se estudian problemas de una y dos muestras con datos normales.

Problemas de una muestra

Sea $X|\mu,\sigma^2 \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Dada una muestra de datos, $\mathbf{x}$, se quiere hacer inferencia sobre μ y/o σ^2.

Recordamos la verosimilitud de μ y σ^2 del Ejemplo 38:

$$l(\mu,\sigma^2|\mathbf{x}) \propto \sigma^{-n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2\right).$$

Es conveniente simplificar este expresión:

$$\begin{aligned}
l(\mu,\sigma^2|\mathbf{x}) &\propto \sigma^{-n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}+\bar{x}-\mu)^2\right) \\
&= \sigma^{-n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\mu)^2\right]\right) \\
&= \sigma^{-n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(n-1)s^2+n(\mu-\bar{x})^2\right]\right)
\end{aligned}$$

Inferencia para μ (σ^2 conocido)

Resumimos los resultados del Ejemplo 38.

- Distribución a priori conjugada $\mu \sim \mathcal{N}\left(m, \sigma^2/n\right)$.

- Distribución a posteriori $\mu|\mathbf{x} \sim \mathcal{N}\left(m^\star, \sigma^2/\alpha^\star\right)$ donde $\alpha^\star = \alpha + n$ y $m^\star = \frac{\alpha m + n\bar{x}}{\alpha + n}$.

- Distribución predictiva.

  Supongamos que se quiere hallar la distribución predictiva (a priori) de una observación $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

  Se tiene $X = \mu + \epsilon$ donde $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ y $\mu \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2/\alpha)$. Entonces, la distribución predictiva (a priori) es

$$X \sim \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right).$$

- Si elegimos una distribución a priori uniforme, entonces $\mu|\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\bar{x}, \sigma^2/n)$ y la media a posteriori es igual al EMV y el intervalo de credibilidad a posteriori es igual al intervalo clásico.

Inferencia para σ^2 cuando μ es conocido

En lugar de tratar de hacer inferencia sobre la varianza σ^2, es conveniente usar la transformación $\phi = 1/\sigma^2$ y hacer inferencia sobre la precisión ϕ.

En términos de ϕ, la verosimilitud es

$$l(\phi|\mathbf{x}) = \phi^{n/2} \exp\left(-\frac{\phi}{2}\left[(n-1)s^2 + n(\mu - \bar{x})^2\right]\right)$$

Si se elige una distribución a priori gamma: $\phi \sim \mathcal{G}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, es fácil de ver que la distribución a posteriori es tambén una gamma.

$$
\begin{aligned}
f(\phi|\mathbf{x}) &\propto f(\phi)l(\phi|\mathbf{x}) \\
&\propto \phi^{\frac{a}{2}-1} \exp\left(\frac{b}{2}\phi\right) \times \\
&\quad \phi^{n/2} \exp\left(-\frac{\phi}{2}\left[(n-1)s^2 + n(\mu-\bar{x})^2\right]\right) \\
&\propto \phi^{\frac{a+n}{2}-1} \exp\left(\frac{b+(n-1)s^2+n(\mu-\bar{x})^2}{2}\phi\right) \\
\phi|\mathbf{x} &\sim \mathcal{G}\left(\frac{a^\star}{2}, \frac{b^\star}{2}\right) \quad \text{donde} \\
a^\star &= a+n \\
b^\star &= b+(n-1)s^2+n(\mu-\bar{x})^2.
\end{aligned}
$$

Entonces, la inferencia es conjugada.

¿Cómo hallamos un intervalo de credibilidad para σ^2?

Es conveniente recordar que si $Z \sim \mathcal{G}\left(\frac{r}{2}, \frac{s}{2}\right)$, entonces

$$sZ \sim \mathcal{G}\left(\frac{r}{2}, \frac{1}{2}\right) = \chi^2_r.$$

Usamos este resultado para hallar un intervalo de credibilidad para σ^2.

Sea (c_1, c_2) el intervalo de 95 % credibilidad. Suponiendo que $\phi|\mathbf{x} \sim \mathcal{G}\left(\frac{a^\star}{2}, \frac{b^\star}{2}\right)$, se tiene

$$\begin{aligned}
0{,}025 &= P(c_1 < \sigma^2) \\
&= P(1/\sigma^2 < 1/c_1) \\
&= P(\phi < 1/c_1) \\
&= P(b^\star\phi < b^\star/c_1) \Rightarrow \\
b^\star/c_1 &= \chi^2_{a^\star}(0{,}975) \\
c_1 &= \frac{b^\star}{\chi^2_{a^\star}(0{,}975)}
\end{aligned}$$

Parecidemente, se tiene $c_2 = \frac{b^\star}{\chi^2_{a^\star}(0{,}025)}$ y un intervalo de credibilidad de 95 % para σ^2 es

$$\left(\frac{b^\star}{\chi^2_{a^\star}(0{,}975)}, \frac{b^\star}{\chi^2_{a^\star}(0{,}025)}\right)$$

Si $a = b = 0$ entonces $a^\star = n$ y $b^\star = (n-1)s^2 + n(\mu - \bar{x})^2$. El intervalo de credibilidad a posteriori es

$$\left(\frac{(n-1)s^2 + n(\mu - \bar{x})^2}{\chi^2_n(0{,}025)}, \frac{(n-1)s^2 + n(\mu - \bar{x})^2}{\chi^2_n(0{,}975)}\right),$$

igual al intervalo clásico para este problema.

La distribución a priori que nos proporciona este resultado es $f(\phi) \propto \frac{1}{\phi}$, que es otra distribución impropia.

Inferencia con ambos parámetros desconocidos

Se quiere definir una distribución a priori conjugada para μ, ϕ.

Se ha visto anteriormente que dado ϕ, la distribución a priori conjugada para μ es normal. Considerando la verosimilitud en términos de ϕ, parece a una densidad gamma.

Se descompone la distribución a priori como

$$f(\mu, \phi) = f(\mu|\phi)f(\phi)$$

y se define

$$\begin{aligned} \mu|\phi &\sim \mathcal{N}\left(m, \frac{1}{\alpha\phi}\right) \\ \phi &\sim \mathcal{G}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \end{aligned}$$

Entonces, la distribución conjunta es

$$
\begin{aligned}
f(\mu, \phi) &\propto \phi^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\alpha\phi}{2}(\mu - m)^2\right) \phi^{\frac{a}{2}-1} \exp\left(-\frac{b\phi}{2}\right) \\
&\propto \phi^{\frac{a+1}{2}-1} \exp\left(-\frac{\phi}{2}\left[b + \alpha(\mu - m)^2\right]\right)
\end{aligned}
$$

Observación 13 *La distribución de μ y ϕ se llama la* **distribución normal gamma** *con parámetros m, α, $a/2$ y $b/2$.*

$$\mu, \phi \sim \mathcal{NG}(m, \alpha, a/2, b/2)$$

Observación 14 *La distribución inducida de σ^2 es una distribución* **gamma inversa**. *Un intervalo de credibilidad de 95 % para σ^2 es*

$$\left(\frac{b}{\chi^2_a(0{,}975)}, \frac{b}{\chi^2_a(0{,}025)}\right).$$

La distribución marginal de μ.

Teorema 5 *$\mu \sim \mathcal{T}(a, m, b/(\alpha a))$, una distribución t de Student. Un intervalo de credibilidad de 95 % para μ es*

$$m \pm \sqrt{b/(a\alpha)}t_a(,025)$$

Demostración

$$\begin{aligned} f(\mu) &= \int_0^\infty f(\mu, \phi)\, d\phi \\ &\propto \int_0^\infty \phi^{\frac{a+1}{2}-1} \exp\left(-\frac{\phi}{2}(b+ \right. \\ & \left. \alpha(\mu-m)^2)\right)\, d\phi \\ &\propto \left(b+\alpha(\mu-m)^2\right)^{-(\frac{a+1}{2})} \\ &\propto \left(1+\frac{1}{a}\left(\frac{\mu-m}{\sqrt{b/a\alpha}}\right)^2\right)^{-(\frac{a+1}{2})} \end{aligned}$$

el núcleo de una distribución t con a grados de libertad, y media m.

Observación 15 *Transformando* $\upsilon = \frac{\mu - m}{\sqrt{b/a\alpha}}$, *se tiene* $\upsilon \sim t_a$, *una distribución t estandar.*

La distribución predictiva de X

Supongamos que se quiere calcular la distribución predictiva de X.

Teorema 6 *Sea* $X|\mu, \phi \sim \mathcal{N}(\mu, 1/\phi)$ *y* $\mu, \phi \sim \mathcal{NG}(m, \alpha, a/2, b/2)$. *La distribución marginal de* X *es*

$$X \sim \mathcal{T}(a, m, b(\alpha + 1)/(\alpha a)).$$

Un intervalo predictivo de 95 % para X *es*

$$m \pm \sqrt{\frac{b(\alpha + 1)}{\alpha a}} t_a(,025).$$

Demostración

Sea $X = \mu + \epsilon$ donde $\mu|\phi \sim \mathcal{N}(m, 1/(\alpha\phi))$ y $\epsilon|\phi \sim \mathcal{N}(0, 1/\phi)$. Obviamente, se tiene $X|\mu, \phi \sim \mathcal{N}(\mu, 1/\phi)$ y además, mediante las propiedades de la distribución normal,

$$X|\phi \sim \mathcal{N}\left(m, \frac{1}{\phi}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right)$$

Defina $\alpha' = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{-1} = \frac{\alpha}{\alpha+1}$ y entonces se tiene $X, \phi \sim \mathcal{NG}(m, \alpha', a/2, b/2)$.

Mediante el teorema 5, se tiene

$$X \sim \mathcal{T}(a, m, b/(\alpha' a))$$

y sustituyendo para α' se demuestra el resultado.

La distribución a posteriori conjunta

Multiplicando por la verosimilitud se demuestra el siguiente teorema:

Teorema 7 *La distribución a posteriori es*

$$\mu, \phi \sim \mathcal{NG}\left(m^*, \alpha^*, a^*/2, b^*/2\right).$$

Entonces

$$f(\mu, \phi|\mathbf{x}) \propto \phi^{\frac{a^*+1}{2}-1} \exp\left(-\frac{\phi}{2}\left[b^* + \alpha^*(\mu - m^*)^2\right]\right)$$

donde

$$\begin{aligned} a^* &= a + n \\ b^* &= b + (n-1)s^2 + \frac{\alpha n}{\alpha + n}(m - \bar{x})^2 \\ \alpha^* &= \alpha + n \\ m^* &= \frac{\alpha m + n\bar{x}}{\alpha + n} \end{aligned}$$

Luego

$$
\begin{aligned}
\mu|\phi,\mathbf{x} &\sim \mathcal{N}\left(m^*, \frac{1}{\alpha^*\phi}\right) \quad \text{and} \\
\phi|\mathbf{x} &\sim \mathcal{G}\left(\frac{a^*}{2}, \frac{b^*}{2}\right) \\
\mu|\mathbf{x} &\sim \mathcal{T}(a^*, m^*, b^*/(\alpha^* a^*)) \\
X|\mathbf{x} &\sim \mathcal{T}(a^*, m^*, b^*(\alpha^* + 1)/(\alpha^* a^*))
\end{aligned}
$$

Observamos resultados para la distribución marginal de μ y la distribución predictiva de una nueva observación X siguen de los teoremas 5 y 6. Sólo necesitamos demostrar que la distribución a priori es conjugada con la forma dada.

Demostración

$$
\begin{aligned}
f(\mu,\phi|\mathbf{x}) &\propto l(\mu,\phi|\mathbf{x})f(\mu,\phi)\\
&\propto \phi^{\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{\phi}{2}\left[(n-1)s^2+n(\mu-\bar{x})^2\right]\right)\times\\
&\quad \phi^{\frac{a+1}{2}-1}\exp\left(-\frac{\phi}{2}\left[b+\alpha(\mu-m)^2\right]\right)\\
&\propto \phi^{\frac{a+n+1}{2}-1}\exp\left(-\frac{\phi}{2}\left[b+\alpha(\mu-m)^2+(n-1)s^2+\right.\right.\\
&\qquad \left.\left. n(\mu-\bar{x})^2\right]\right)\\
&\propto \phi^{\frac{a^*+1}{2}-1}\exp\left(-\frac{\phi}{2}\left[b+(n-1)s^2+\alpha^*(\mu-m^*)^2+\right.\right.\\
&\qquad \left.\left. \alpha m^2+n\bar{x}^2-\alpha^* m^{*2}\right]\right)\\
&\propto \phi^{\frac{a^*+1}{2}-1}\exp\left(-\frac{\phi}{2}\left[b+(n-1)s^2+\alpha^*(\mu-m^*)^2+\right.\right.\\
&\qquad \left.\left. \alpha m^2+n\bar{x}^2-\frac{(\alpha m+n\bar{x})^2}{\alpha+n}\right]\right)\\
&\propto \phi^{\frac{a^*+1}{2}-1}\exp\left(-\frac{\phi}{2}\left[b+(n-1)s^2+\alpha^*(\mu-m^*)^2+\right.\right.\\
&\qquad \left.\left. \frac{\alpha n}{\alpha+n}(m-\bar{x})^2\right]\right)\\
&\propto \phi^{\frac{a^*+1}{2}-1}\exp\left(-\frac{\phi}{2}\left[b^*+\alpha^*(\mu-m^*)^2\right]\right).
\end{aligned}
$$

Ejemplo 40 *Suponer que* $X|\mu,\phi \sim \mathcal{N}(\mu, 1/\phi)$ *con las distribuciones a priori* $\mu|\phi \sim \mathcal{N}(85, 1/\phi)$ *y* $\phi \sim \mathcal{G}\left(\frac{4}{2}, \frac{350}{2}\right)$.

Dada una muestra con $n = 100$, $\bar{x} = 89$ *y* $s^2 = 30$, *calcular la distribución a posteriori de* μ *y* ϕ.

Tenemos

$$
\begin{aligned}
a^* &= 4 + 100 = 104 \\
b^* &= 350 + 99 \times 30 + \frac{1 \times 100}{1 + 100}(85 - 89)^2 \\
&= 3335{,}84 \\
\alpha^* &= 1 + 100 = 101 \\
m^* &= \frac{1 \times 85 + 100 \times 89}{1 + 100} \\
&= 88{,}96
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} \textit{Entonces } \mu, \phi|\mathbf{x} &\sim \mathcal{NG}\left(88{,}96, 101, \frac{104}{2}, \frac{3335{,}84}{2}\right) \\ \mu|\phi, \mathbf{x} &\sim \mathcal{N}\left(88{,}96, \frac{1}{101\phi}\right) \quad \textit{y} \\ \phi|\mathbf{x} &\sim \mathcal{G}\left(\frac{104}{2}, \frac{3335{,}84}{2}\right). \end{aligned}$$

También calculemos intervalos de credibilidad para μ antes y después de ver los datos.

Antes de ver los datos tenemos el intervalo

$$85 \pm \sqrt{\frac{335}{4 \times 1}} t_4(,025) \approx (59{,}6, 110{,}4)$$

Después de ver los datos tenemos el intervalo

$$88{,}96 \pm \sqrt{\frac{3335{,}84}{104 \times 101}} t_{104}(,025) \approx (87{,}84, 90{,}08)$$

Finalmente calculemos intervalos predictivos para una observación X antes y después de ver los datos.

Antes de ver los datos tenemos el intervalo

$$85 \pm \sqrt{\frac{335 \times (4+1)}{4 \times 1}} t_4(,025) \approx (28{,}19, 141{,}81)$$

Después de ver los datos tenemos

$$\begin{aligned} 88{,}96 \pm \sqrt{\frac{3335{,}84 \times (104+1)}{104 \times 101}} t_{104}(,025) \\ \approx (77{,}53, 100{,}39) \end{aligned}$$

Los intervalos predictivos son mucho más anchos que los intervalos de credibilidad para la media.

Resultados parecidos a los resultados clásicos

Dada la distribución a priori impropia

$$f(\mu, \phi) \propto \frac{1}{\phi},$$

la distribución a posteriori de μ, ϕ es

$$\begin{aligned} f(\mu, \phi|\mathbf{x}) &\propto \phi^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{\phi}{2}\left[(n-1)s^2 + n(\mu-\bar{x})^2\right]\right) \\ &\propto \phi^{\frac{(n-1)+1}{2}-1} \exp\left(-\frac{\phi}{2}\left[(n-1)s^2 + \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + n(\mu-\bar{x})^2\right]\right) \end{aligned}$$

que es el núcleo de una distribución normal gamma.

$$\mu, \phi|\mathbf{x} \sim \mathcal{NG}\left(\bar{x}, n, \frac{n-1}{2}, \frac{(n-1)s^2}{2}\right).$$

Luego $\mu|\phi, \mathbf{x} \sim \mathcal{N}\left(\bar{x}, \frac{1}{n\phi}\right)$ y $\phi|\mathbf{x} \sim \mathcal{G}\left(\frac{n-1}{2}, \frac{(n-1)s^2}{2}\right)$ y por tanto $\mu|\mathbf{x} \sim \mathcal{T}(n-1, \bar{x}, s^2/n)$.

El intervalo de credibilidad bayesiano de 95 % para μ es

$$\bar{x} \pm t_{n-1}(,025)\frac{s}{\sqrt{n}}$$

que coincide con el intervalo clásico de confianza.

La distribución predictiva para una nueva observación X es $X \sim \mathcal{T}(n-1, \bar{x}, (1+1/n)s^2)$. Un intervalo predictivo de 95 % para X es

$$\bar{x} \pm t_{n-1}(,025)s\sqrt{1+\frac{1}{n}}.$$

Finalmente, usando Observación 14, un intervalo de credibilidad de 95 % para σ^2 es

$$\left(\frac{s^2}{\chi^2_{n-1}(0,975)}, \frac{s^2}{\chi^2_{n-1}(0,025)}\right)$$

igual al intervalo clásico de confianza.

Problemas de dos muestras

Sólo consideramos en detalle los problemas con datos no apareados y varianzas desconocidas.

Los resultados bayesianos para los otros problemas estudiados habitualmente son parecidos a los resultados clásicos. Los comentamos brevemente

Datos apareados

Igual a la inferencia clásica, tomando las diferencias de cada pareja de de datos, el problema se reduce a un problema de una muestra.

Datos independientes con varianzas conocidas

Dadas distribuciones a priori normales para las medias desconocidas, usando el Ejemplo 38, las distribuciones a posteriori son también normales y luego la diferencia entre las medias es normal. Distribuciones a priori uniformes para las dos medias implica que la inferencia bayesian coincide con la inferencia clásica.

Datos independientes, con varianzas iguales pero desconocidas

Sea $X_i|\mu_1, \phi \sim \mathcal{N}(\mu_i, 1/\phi)$ con muestras de tamaño n_i, para $i = 1, 2$. Dada la distribución a priori no informativa

$$f(\mu_1, \mu_2, \phi) \propto \frac{1}{\phi}.$$

se tiene

$$\begin{aligned} f(\mu_1, \mu_2, \phi|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &\propto \phi^{\frac{n_1+n_2-1}{2}} \exp\left(-\frac{\phi}{2}\left[\sum_{i=1}^{2}(n_i-1)s_i^2 + \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. n_i(\mu_i - \overline{x}_i)^2\right]\right) \\ \mu_i|\phi, \mathbf{x}_i &\sim \mathcal{N}\left(\overline{x}_i, \frac{1}{n_i\phi}\right) \quad \text{para } i = 1, 2. \end{aligned}$$

Integrando por μ_1 y μ_2 succesivamente, se demuestra que

$$\phi|\mathbf{x} \sim \mathcal{G}\left(\frac{n_1 + n_2 - 2}{2}, \frac{\sum_{i=1}^{2}(n_i - 1)s_i^2}{2}\right)$$

Entonces, definiendo $\delta = \mu_1 - \mu_2$, se tiene

$$\delta|\phi, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \sim \mathcal{N}\left(\overline{x}_1 - \overline{x}_2, \frac{1}{\phi}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\right)$$

y δ, ϕ tiene una distribución normal gamma.

Un intervalo de credibilidad de 95 % para δ es

$$\overline{x}_1 - \overline{x}_2 \pm s_{comb}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{n_1+n_2-2}$$

donde $s_{comb}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{2}(n_i-1)s_i^2}{n_1+n_2-2}$.

El intervalo es igual al intervalo frecuentista.

El problema de Behrens y Fisher

Se suponen dos poblaciones $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, 1/\phi_1)$ y $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, 1/\phi_2)$.

Se quiere hacer inferencia sobre $\delta = \mu_1 - \mu_2$.

Se observan dos muestras $(n_1, \bar{x}_1, s_1^2)$ y $(n_2, \bar{x}_2, s_2^2)$.

Pongamos las distribuciones a priori no informativas

$$f(\mu_i \phi_i) \propto \frac{1}{\phi_i} \quad i = 1, 2.$$

Sabemos que las distribuciones a posteriori de μ_1 y μ_2 son

$$\begin{aligned} \mu_1|\mathbf{x}_1 &\sim \mathcal{T}(n_1 - 1, \bar{x}_1, s_1^2/n_1) \\ \mu_2|\mathbf{x}_2 &\sim \mathcal{T}(n_2 - 1, \bar{x}_2, s_2^2/n_2) \end{aligned}$$

La distribución a posteriori de δ es la distribución de la diferencia entre dos variables t de Student.

Podemos escribir la fórmula para la distribución:

$$f(\delta|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \int f_{\mu_1}(\delta + \mu_2|\mathbf{x}_1) f(\mu_2|\mathbf{x}_2)\, d\mu_2$$

pero es mas fácil considerar la función "normalizada"

$$\delta' = \frac{\delta - (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^{1/2}}$$

Teorema 8 *Defina* $\tan\omega = \frac{s_1/\sqrt{n_1}}{s_2/\sqrt{n_2}}$, *y entonces*

$$\delta' = T_1 \sin\omega - T_2 \cos\omega$$

donde $T_1 = \frac{\mu_1 - \bar{x}_1}{s_1/\sqrt{n_1}}$ *and* $T_2 = \frac{\mu_2 - \bar{x}_2}{s_2/\sqrt{n_2}}$ *tienen distribuciones de t estandares con* $n_1 - 1$ *y* $n_2 - 1$ *grados de libertad respetivamente.*

Demostración

$$\begin{aligned}
\delta' &= \frac{(\mu_1-\mu_2)-(\bar{x}_1-\bar{x}_2)}{(s_1^2/n_1+s_2^2/n_2)^{1/2}} \\
&= \frac{(\mu_1-\bar{x}_1)-(\mu_2-\bar{x}_2)}{(s_1^2/n_1+s_2^2/n_2)^{1/2}} \\
&= \frac{s_1/\sqrt{n_1}\frac{\mu_1-\bar{x}_1}{s_1/\sqrt{n_1}} - s_2/\sqrt{n_2}\frac{\mu_2-\bar{x}_2}{s_2/\sqrt{n_2}}}{(s_1^2/n_1+s_2^2/n_2)^{1/2}} \\
&= \frac{s_1/\sqrt{n_1}}{(s_1^2/n_1+s_2^2/n_2)^{1/2}}T_1 - \frac{s_2/\sqrt{n_2}}{(s_1^2/n_1+s_2^2/n_2)^{1/2}}T_2
\end{aligned}$$

Cuadrando y sumando los dos pesos, el resultado es 1 y entonces

$$\delta' = \sin\omega T_1 - \cos\omega T_2$$

Definición 8 *La distribución de* $T_{\nu_1}\sin\omega - T_{\nu_2}\cos\omega$ *donde* T_ν *es una variable t de Student con* ν *grados de libertad, se llama* **la distribución de Behrens y Fisher** *con parámetros* ν_1,ν_2 *y* ω*:* $\mathcal{BF}(\nu_1,\nu_2,\omega)$.

Entonces concluimos que

$$\delta' \sim \mathcal{BF}(n_1-1, n_2-1, \tan^{-1}\frac{s_1/\sqrt{n_1}}{s_2/\sqrt{n_2}}).$$

Observación 16 *Calcular intervalos de credibilidad etcétera es difícil. Pero se puede utilizar la aproximación de Patil.*

Si $X \sim \mathcal{BF}(\nu_1, \nu_2, \omega)$ *entonces* $X/a \approx t_b$ *donde*

$$\begin{aligned}
f_1 &= \left(\frac{n_1-1}{n_1-3}\right)\sin^2\omega + \left(\frac{n_2-1}{n_2-3}\right)\cos^2\omega \\
f_2 &= \frac{(n_1-1)^2}{(n_1-3)^2(n_1-5)}\sin^4\omega + \\
&\quad \frac{(n_2-1)^2}{(n_2-3)^2(n_2-5)}\cos^4\omega \\
b &= 4 + (f_1^2/f_2) \\
a &= \sqrt{f_1(b-2)/b}
\end{aligned}$$

Observación 17 *Otro método es muestrear las distribuciones a posteriori de* μ_1 *y* μ_2 *para simular una muestra de la distribución de* δ*. Se puede utilizar la muestra de diferencias para estimar intervalos de credibilidad etc.*

Observación 18 *(Ver Lee Secciones 5.3–5.4). No hay resultados parecidos usando inferencia clásica. (La distribución de muestreo de δ' depende de la razón ϕ_1/ϕ_2.) Los clásicos utilizan una aproximación t:*

$$\delta' \approx t_r \quad \textit{donde} \quad r = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{\left(\frac{s_1^4/n_1^2}{n_1-1} + \frac{s_2^4/n_2^2}{n_2-1}\right)}$$

El problema es que no se puede evaluar la calidad de la aproximación para una muestra dada.

Ejemplo 41 *Se supone que* $(n_1, \bar{x}, s_1^2) = (10, 0, 1)$ *y* $(n_2, \bar{y}, s_2^2) = (10, 1, 1)$.

Entonces, dadas las distribuciones a priori no informativas, $\delta' \sim \mathcal{BF}(9, 9, \pi/4)$ *y un intervalo de credibilidad de 95 % es (utilizando la aproximación de Patil que implica* $a = 1{,}04, b = 14$*)*

$$1 \pm 1{,}04\sqrt{2}t_{14}(,975) = (0{,}00, 2{,}01)$$

El intervalo de confianza clásico es (con $r = 18$*)*

$$1 \pm \sqrt{2}t_{18}(,975) = (0{,}06, 1{,}94)$$

La razón de dos varianzas

De vez en cuando se quiere hacer inferencia sobre la razón de las dos varianzas $\zeta = \sigma_1^2/\sigma_2^2 = \phi_2/\phi_1$.

Sea $(n_i, \bar{x}_i, s_i^2)$, para $i = 1, 2$, como anteriormente con distribuciones a priori no informativas $f(\mu_i, \phi_i) \propto 1/\phi_i$. Entonces, recordamos que $\phi_i|\text{data} \sim \mathcal{G}\left(\frac{n_i-1}{2}, \frac{(n_i-1)s_i^2}{2}\right)$ y luego $(n_i - 1)s_i^2\phi_i \sim \chi^2_{n_i-1}$. Ahora:

$$
\begin{aligned}
\zeta &= \frac{\phi_2}{\phi_1} \\
&= \left(\frac{(n_1-1)s_1^2}{(n_2-1)s_2^2}\right) \frac{(n_2-1)s_2^2\phi_2}{(n_1-1)s_1^2\phi_1} \\
&= \left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\right) \frac{\frac{(n_2-1)s_2^2}{(n_2-1)}\phi_2}{\frac{(n_1-1)s_1^2}{(n_1-1)}\phi_1}
\end{aligned}
$$

y entonces se tiene

$$
\frac{s_2^2}{s_1^2}\zeta \sim \mathcal{F}(n_2 - 1, n_1 - 1).
$$

Un intervalo de credibilidad de 95 % para ζ es

$$\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}F_{n_1-1}^{n_2-1}(0{,}025), \frac{s_1^2}{s_2^2}F_{n_1-1}^{n_2-1}(0{,}975)\right)$$

igual al intervalo clásico.

Observación 19 *Es fácil extender el análisis al modelo normal gamma.*