4. PROBABILIDAD CONDICIONADA Y EL TEOREMA DE BAYES

¿Cambiarías de puerta?

Objetivos

Introducir la probabilidad condicionada y su uso en resolver problemas. Introducir el concepto de independencia. Estudiar las aplicaciones del teorema de Bayes y la interpretación subjetiva de la probabilidad.

Para leer

Wikipedia tiene una página útil sobre la probabilidad condicionada.

Está página da algunos ejemplos del uso del teorema de Bayes.

Los *minivideos* de Emilio Letón y su equipo sobre probabilidad condicionada son muy útiles.

La probabilidad condicionada

En el tema 3, seleccionamos un empresario al azar y preguntamos sobre la probabilidad de que tenga por lo menos dos empresas, suponiendo que fuese quiosquero.

		Número de empresas				
		1	2	3	4	Total
Tipo de establecimiento	Quiosco	25	15	8	5	53
	Fruteria	15	6	5	0	26
	Bar	10	4	5	2	21
	Total	50	25	18	7	100

Miramos sólo los números de empresas de los quiosqueros.

	Número de empresas 1	2	3	4	Total
Quiosco	25	15	8	5	53

Luego, la probabilidad es de $\frac{15+8+5}{53} = \frac{28}{53}$.

Esta probabilidad es una probabilidad condicionada:

$$P(\underbrace{\text{tenga por lo menos dos empresas}}_{A}\ \underbrace{\text{suponiendo que fuese quiosquero}}_{B})$$

Observamos también que $P(A \cap B) = \frac{28}{100}$ y que $P(B) = \frac{53}{100}$ y entonces

$$P(A \text{ dado } B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Definición formal

Formalmente, para dos sucesos A y B donde $P(B) > 0$, se define *la probabilidad condicionada de A dado B* como

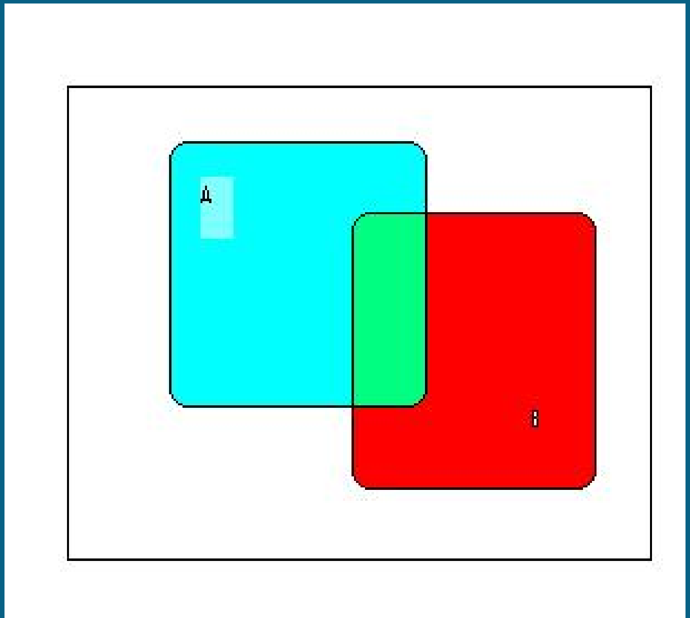
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Se interpreta la probabilidad como la probabilidad de A suponiendo que B haya ocurrido.

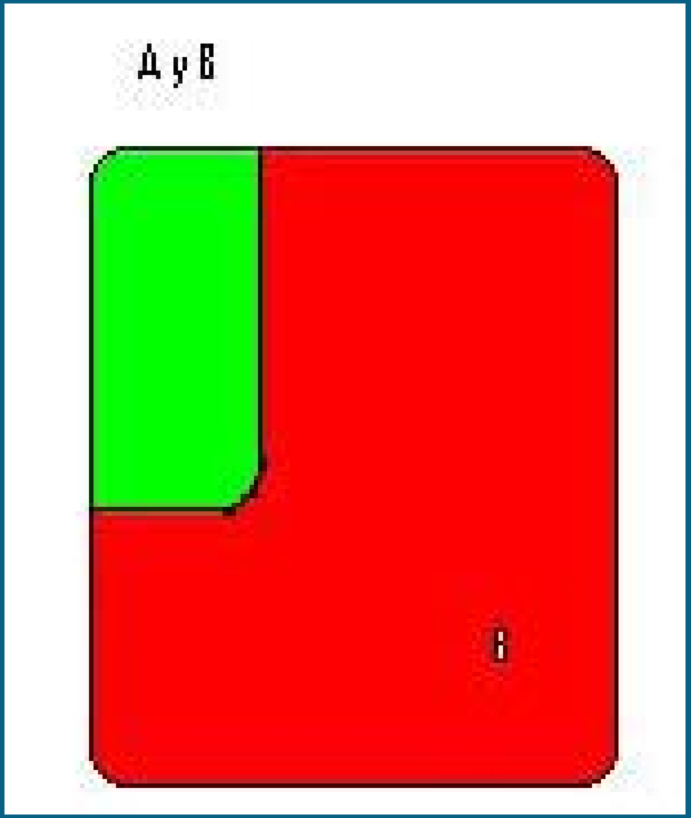
Aquí se ve un ejemplo sencillo del cálculo de una probabilidad condicionada.

Interpretación con diagramas Venn

A priori, la probabilidad de A equivale al área de $A \cap B$ (en verde) más el área de $A \cap \bar{B}$ (en azúl) dividido por el área del espacio muestral (es decir el tamaño de la caja) que es 1.



Pero si observamos que B ha sucedido, entonces, el tamaño muestral se ha reducido a los sucesos elementales para los cuales B ha ocurrido y luego, la probabilidad de A es el área de $A \cap B$ partido por el área de B.



La ley de la multiplicación

En muchas aplicaciones, es útil reescribir la fórmula para la probabilidad condicionada de otra manera

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B).$$

Esta fórmula es conocida como *la ley de la multiplicación*.

La ley de la multiplicación

En muchas aplicaciones, es útil reescribir la fórmula para la probabilidad condicionada de otra manera

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B).$$

Esta fórmula es conocida como *la ley de la multiplicación*.

Vamos a repartir dos naipes de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean oros?

La ley de la multiplicación

En muchas aplicaciones, es útil reescribir la fórmula para la probabilidad condicionada de otra manera

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B).$$

Esta fórmula es conocida como *la ley de la multiplicación*.

Vamos a repartir dos naipes de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean oros?

Posemos intentar resolver este problema a través de la combinatoria utilizando la probabilidad hipergeometrica ...

$$p = \frac{\binom{10}{2}\binom{30}{0}}{\binom{40}{2}} = \cdots = \frac{10 \times 9}{40 \times 39} = \frac{3}{52}.$$

pero es mucho más fácil utilizando la probabilidad condicionada.

Sea A el suceso de que la segunda carta es oro y B el suceso de que el primer naipe es de oros.

$$\begin{aligned} P(A\cap B) &= P(A|B)P(B) \\ &= P(A|B)\times\frac{10}{40} \quad \text{porque en principio hay 40 naipes y 10 oros} \\ &= \frac{9}{39}\times\frac{10}{40} \quad \text{porque quedan 39 naipes y 9 oros} \\ &= \frac{3}{52} \end{aligned}$$

Ejemplo

En la evaluación de un programa de capacitación de ventas, una empresa descubrió que de los 50 vendedores que recibieron un bono el año anterior, 20 habían acudido a un programa especial de capacitación en ventas. La empresa tiene 200 empleados. Sea B el suceso de que un vendedora recibiera un bono y S el suceso de que acudieron al programa especial. Hallar $P(B)$, $P(S|B)$ y $P(B \cap S)$.

Ejemplo

En la evaluación de un programa de capacitación de ventas, una empresa descubrió que de los 50 vendedores que recibieron un bono el año anterior, 20 habían acudido a un programa especial de capacitación en ventas. La empresa tiene 200 empleados. Sea B el suceso de que un vendedora recibiera un bono y S el suceso de que acudieron al programa especial. Hallar $P(B)$, $P(S|B)$ y $P(B \cap S)$.

$P(B) = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}$, $P(S|B) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$ y luego,

$$P(B \cap S) = P(S \cap B) = P(S|B)P(B) = \frac{1}{10}.$$

Extendiendo la ley de multiplicación

Teorema 5
Supongamos que tenemos una secuencia de sucesos, $A_1, \ldots, A_k$. Entonces,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = P(A_k|A_1, \ldots, A_{k-1}) \times P(A_{k-1}|A_1, \ldots, A_{k-2}) \times \cdots \times P(A_2|A_1) \times P(A_1)$$

Demostración Se puede demostrar el resultado a través de la inducción.

Supongamos que $k =$. Entonces, por la ley de multiplicación,

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1).$$

Ahora supongamos que el resultado es verdad para $k = 1, \ldots, K$ y consideramos un conjunto de $K+1$ sucesos, $A_1, \ldots, A_{K+1}$. Luego:

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{i=1}^{K+1} A_i\right) &= P\left(\underbrace{\bigcap_{i=1}^{K} A_i}_{B} \cap A_{K+1}\right) \\
&= P(A_{K+1}|B)P(B) \quad \text{por la ley de la multiplicación} \\
&= P\left(A_{K+1}\middle|\bigcap_{i=1}^{K} A_i\right) P\left(\bigcap_{i=1}^{K} A_i\right) \quad \text{por definición} \\
&= P\left(A_{K+1}\middle|\bigcap_{i=1}^{K} A_i\right) \times P\left(A_K\middle|\bigcap_{i=1}^{K-1} A_i\right) \times P\left(A_{K-1}\middle|\bigcap_{i=1}^{K-2} A_i\right) \times \\
&\quad \cdots \times P(A_2|A_1) \times P(A_1) \quad \text{por el supuesto de inducción}
\end{aligned}
$$

lo que implica que la ley de la multiplicación es válida también para $K + 1$ sucesos, y entonces es válida para cualquier conjunto de sucesos.

$\square$

Ejemplo: Jugando al poquér

¿Cuál es la probabilidad de obtener una escalera real de un palo?

$$
\begin{aligned}
p \quad = \quad & P(\text{primera carta es 10 J Q K o A}) \times \\
& P(\text{segunda es real distinta y del mismo palo que la primera}|\text{primera carta}) \times \\
& \times P(\text{tercera es real distinta del mismo palo que las primeras dos}|\text{primeras 2}) \times \\
& P(\text{cuarta es real distinta del mismo palo que las primeras tres}|\text{primeras 3}) \\
& \times P(\text{quinta es real distinta del mismo palo que las primeras cuatro}|\text{primeras 4}) \\
= \quad & \frac{20}{52} \times \frac{4}{51} \times \frac{3}{50} \times \frac{2}{49} \times \frac{1}{48} \approx 0.00000154
\end{aligned}
$$

El problema del cumpleaños (otra vez)

Ya hemos resuelto el problema utilizando métodos de combinatoria pero es más fácil utilizar probabilidades condicionadas.

Supongamos que tenemos k personas. Definimos A_i como el suceso de que el cumpleaños de persona i sea distinto a los cumpleaños de personas 1 hasta $i-1$ para $i = 2, \ldots, k$. Entonces,

$P\left(\bigcap_{i=2}^{k} A_i\right)$ es la probabilidad de que todos los cumpleaños sean distintos.

Luego,

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{i=2}^{k} A_i\right) &= P\left(A_k \middle| \bigcap_{i=2}^{k-1} A_i\right) \times \cdots \times P(A_3|A_2) \times P(A_2) \\
&= P\left(A_k \middle| \bigcap_{i=2}^{k-1} A_i\right) \times \cdots \times P(A_3|A_2) \times \frac{364}{365} \\
&= P\left(A_k \middle| \bigcap_{i=2}^{k-1} A_i\right) \times \cdots \times \frac{363}{365} \times \frac{364}{365} \\
&= \frac{365-k+1}{365} \times \cdots \times \frac{363}{365} \times \frac{364}{365} \\
&= \frac{365-k+1}{365} \times \cdots \times \frac{363}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{365}{365} \\
&= \frac{365!}{(365-k)!365^k}
\end{aligned}
$$

que es la misma probabilidad que calculamos antes.

Independencia

Supongamos que tiramos dos monedas equilibradas una tras otra. Intuitivamente, el resultado de la primera tirada no influye en el resultado de la segunda tirada. Entonces, siendo A el suceso de que la primera tirada salga cruz, y B el suceso de que la segunda tirada sea cruz, entonces,

$$\frac{1}{2} = P(B|A) = P(B) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{4}.$$

Formalmente, se dice que dos sucesos, A y B son *independientes* si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Obviamente, si $P(A) > 0$, esta definición implica que

$$P(B|A) = P(B)$$

es decir la información de que A ha ocurrido no cambia la probabilidad de B. Además, si $P(B) > 0$, independencia implica que

$$P(A) = P(A|B)$$

y la información que B ha ocurrido no afecta la probabilidad de A.

Intentamos *este ejemplo*

Teorema 6
Si A y B son independientes, entonces

$$\begin{aligned} P(A \cap \bar{B}) &= P(A)P(\bar{B}) \\ P(\bar{A} \cap B) &= P(\bar{A})P(B) \\ P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\bar{A})P(\bar{B}). \end{aligned}$$

Teorema 6
Si A y B son independientes, entonces

$$\begin{aligned} P(A \cap \bar{B}) &= P(A)P(\bar{B}) \\ P(\bar{A} \cap B) &= P(\bar{A})P(B) \\ P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\bar{A})P(\bar{B}). \end{aligned}$$

Demostración Sólo demostramos el primer resultado.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \\ P(A \cap \bar{B}) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \quad \text{si } A \text{ y } B \text{ son independientes} \\ &= P(A)\,(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B}) \end{aligned}$$

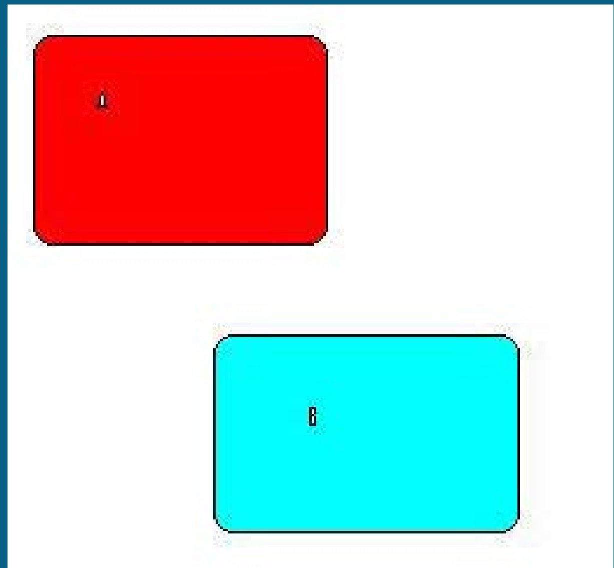
$\square$

Independencia e incompatibilidad

¿Pueden dos sucesos incompatibles ser independientes?

Independencia e incompatibilidad

¿Pueden dos sucesos incompatibles ser independientes?



Para dos sucesos incompatibles, $A \cap B = \phi$ y $P(A \cap B) = 0$, y entonces, sólo pueden ser independientes en el caso de que alguno de ellos tiene probabilidad cero.

Incompatibilidad es casi lo opuesto a independencia.

Secuencias de sucesos independientes

Supongamos ahora que tenemos una secuencia de sucesos, $A_1, A_2, \ldots, A_n$. En este caso, es natural generalizar la definición de independencia para decir que los sucesos son independientes si

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Pero esta definición sóla puede no ser suficiente.

Ejemplo

Haremos un experimento con espacio muestral $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_8\}$ *donde cada suceso elemental tiene probabilidad* $1/8$. *Sea* $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $B = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$ *y* $C = \{\omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$.

Ejemplo

Haremos un experimento con espacio muestral $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_8\}$ *donde cada suceso elemental tiene probabilidad* $1/8$*. Sea* $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$*,* $B = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$ *y* $C = \{\omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$*.*

Luego $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$ y $A \cap B \cap C = \{\omega_4\}$ y

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C).$$

No obstante, $A \cap B = \{\omega_4\}$ y $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$.

Igualmente, $P(A \cap C) \neq P(A)P(C)$ y $P(B \cap C) \neq P(B)P(C)$ y los sucesos no son independientes por parejas.

Tampoco la condición de independencia entre parejas de sucesos sería suficiente de asegurar independencia entre triples, etc.

Ejemplo

Consideramos un experimento con espacio muestral $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ *y supongamos que cada suceso elemental tiene probabilidad* $\frac{1}{4}$. *Definimos los sucesos* $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_1, \omega_3\}$ *y* $C = \{\omega_1, \omega_4\}$.

Ejemplo

Consideramos un experimento con espacio muestral $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ y supongamos que cada suceso elemental tiene probabilidad $\frac{1}{4}$. Definimos los sucesos $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_1, \omega_3\}$ y $C = \{\omega_1, \omega_4\}$.

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\{\omega_1\} &= A \cap B = A \cap C = B \cap C \\
\frac{1}{4} &= P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) \\
&= P(A)P(B) = P(A)P(C) = P(B)P(C)
\end{aligned}
$$

y luego, A, B y C son independientes en parejas.

No obstante, $A \cap B \cap C = \phi$ y claramente,

$$\frac{1}{4} = P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}.$$

Necesitamos suponer que los pares de sucesos son independientes, tal que

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad \text{para } i \neq j$$

y los triples,

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k) \quad \text{para } i \neq j \neq k$$

y todos los subconjuntos.

Formalmente, se dice que los sucesos, $A_1, \ldots, A_n$ son *mutuamente independientes* si para cada subconjunto, $A_{i_1}, \ldots, A_{i_j}$ entonces

$$P\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}\right) = P(A_{i_1}) \times \cdots \times P(A_{i_j})$$

para $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leq n$, $j \in \{2, \ldots, n\}$.

La probabilidad geométrica

Supongamos que tiramos una moneda con $P(cruz) = p$ hasta observar la primera cruz. ¿Cuál es la probabilidad de que necesitemos lanzar la moneda x veces?

La probabilidad geométrica

Supongamos que tiramos una moneda con P(cruz) = p hasta observar la primera cruz. ¿Cuál es la probabilidad de que necesitemos lanzar la moneda x veces?

Obviamente, si $x = 1$, tenemos $P(\text{primer lanzamiento sale cruz}) = p$ y si $x = 2$, suponiendo independencia entre las tiradas,

$$P(\text{primer lanzamiento sale cara y segundo sale cruz}) = P(\text{cara})P(\text{cruz}) = (1-p)p.$$

Más generalmente, si necesitamos lanzar la moneda x veces, entonces esto implica que observamos $x - 1$ caras seguidas por un cruz y

$$\begin{aligned} P(\text{cara}, \ldots, \text{cara}, \text{cruz}) &= P(\text{cara}) \times \cdots \times P(\text{cara}) \times P(\text{cruz}) \\ &= (1-p)^{x-1} p \end{aligned}$$

Esta probabilidad es una probabilidad geométrica. Ver el tema 6.

La probabilidad binomial

Supongamos que vamos a tirar una moneda con $P(cruz) = p$ un número, n, de veces. ¿Cuál es la probabilidad de observar exactamente x cruces?

La probabilidad binomial

Supongamos que vamos a tirar una moneda con $P(cruz) = p$ un número, n, de veces. ¿Cuál es la probabilidad de observar exactamente x cruces?

Consideramos en primer lugar la probabilidad de la secuencia

$$P(\{\underbrace{\text{cruz}, \ldots, \text{cruz}}_{x}, \underbrace{\text{cara}, \ldots, \text{cara}}_{n-x}\}).$$

Se tiene

$$\begin{aligned} prob. &= P(\text{cruz}) \times \cdots \times P(\text{cruz}) \times P(\text{cara}) \times \cdots \times P(\text{cara}) \\ &= p \times \cdots \times p \times (1-p) \times \cdots \times (1-p) \\ &= p^x (1-p)^{n-x} \quad \text{para } x \in \{1, 2, \ldots, \infty\}. \end{aligned}$$

Igualmente, cualquier secuencia de x cruces tiene la misma probabilidad utilizando los mismos argumentos. Luego

$$\begin{aligned} P(x \text{ cruces}) &= \text{número de secuencias de } x \text{ cruces y } n-x \text{ caras} \times p^x(1-p)^{n-x} \\ &= \left(\begin{array}{c} n \\ x \end{array} \right) p^x(1-p)^{n-x} \quad \text{para } x \in \{0,1,2,\ldots,n\}. \end{aligned}$$

Esta fórmula es la versión más general (para monedas sesgadas) de la probabilidad binomial que derivamos en el tema 3.

Ejemplos

Tenemos una moneda con $P(cruz) = 0.4$,

a. *Hallar la probabilidad de que la primera cruz salga en la tercera vez que lanzamos la moneda.*

b. *Si lanzamos la moneda 3 veces, ¿cuál es la probabilidad de que observemos exactamente 1 cruz?*

Ejemplos

Tenemos una moneda con $P(cruz) = 0.4$,

a. *Hallar la probabilidad de que la primera cruz salga en la tercera vez que lanzamos la moneda.*

b. *Si lanzamos la moneda 3 veces, ¿cuál es la probabilidad de que observemos exactamente 1 cruz?*

a. La primera probabilidad es geométrica:

$$p = (1 - 0.4)^2 \times 0.4 = 0.144.$$

b. y la segunda es binomial

$$p = \left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right) 0.4^1 (1 - 0.4)^2 = 3 \times 0.4 \times 0.36 = 0.432.$$

La ley de la probabilidad total

Recordamos que para dos sucesos, A y B, se tiene

$$\begin{aligned} A &= (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \\ P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \quad \text{y, por la ley de multiplicación} \\ &= P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B}) \end{aligned}$$

Ejemplo

El 42% de la población activa de cierto pais está formada por mujeres. Se sabe que un 24% de las mujeres y un 16% de los hombres están en el paro.

¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar de la población activa en esta pais esté en el paro?

Ejemplo

El 42% de la población activa de cierto pais está formada por mujeres. Se sabe que un 24% de las mujeres y un 16% de los hombres están en el paro.

¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar de la población activa en esta pais esté en el paro?

Sea M el suceso de que la persona fuese mujer y H hombre. Luego,

$$P(M) = 0.42 \quad P(H) = P(\bar{M}) = 1 - 0.42 = 0.58.$$

Sea P el suceso de que la persona esté en el paro. Entonces

$$P(P|M) = 0.24 \quad P(P|H) = 0.16.$$

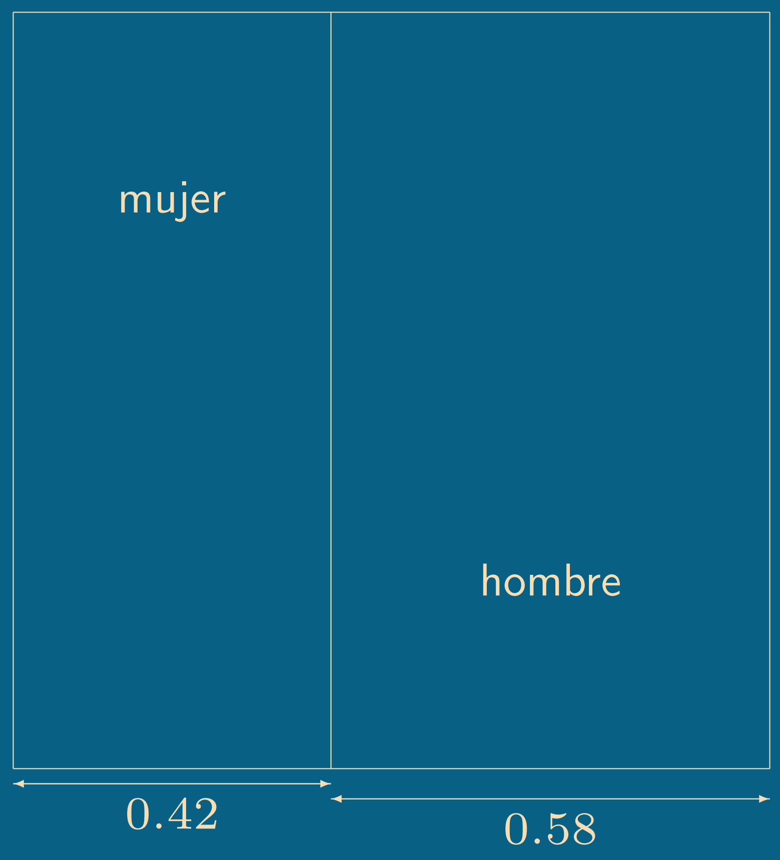
Utilizando la ley de la probabilidad total tenemos

$$\begin{aligned} P(P) &= P(P|M)P(M) + P(P|H)P(H) \\ &= 0.24 \times 0.42 + 0.16 \times 0.58 \\ &= 0.1936 \end{aligned}$$

A menudo, es útil representar el problema en forma de diagrama. Hay dos métodos posibles; el uso de diagramas de Venn y los árboles de probabilidad.

Resolución con diagramas Venn

Se divide el mundo en hombres y mujeres

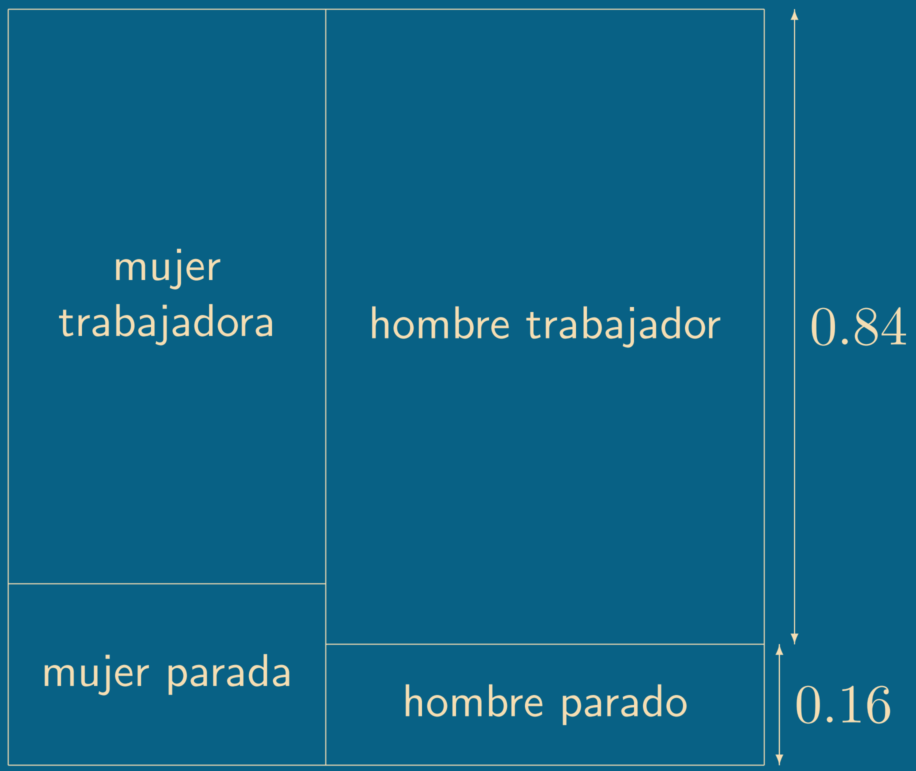


Resolución con diagramas Venn

Ahora se dividen las mujeres en trabajadoras y paradas

Resolución con diagramas Venn

y también se dividen los hombres.



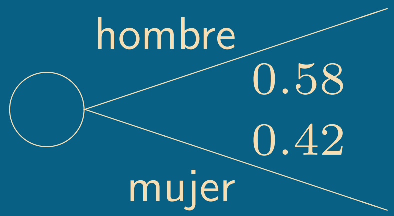
Resolución con diagramas Venn

y al final, se evalúa el área del diagrama correspondiente a los parados.

$$p = 0.42 \times 0.24 + 0.58 \times 0.16 = 0.1936$$

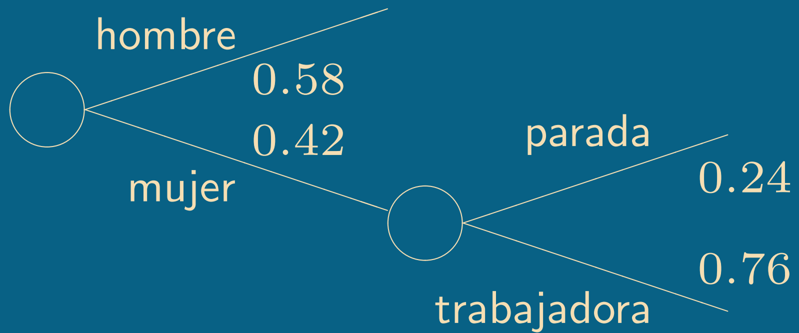
Resolución con árboles de probabilidad

Se construyen las primeras dos ramas del árbol, que dividen hombres y mujeres.



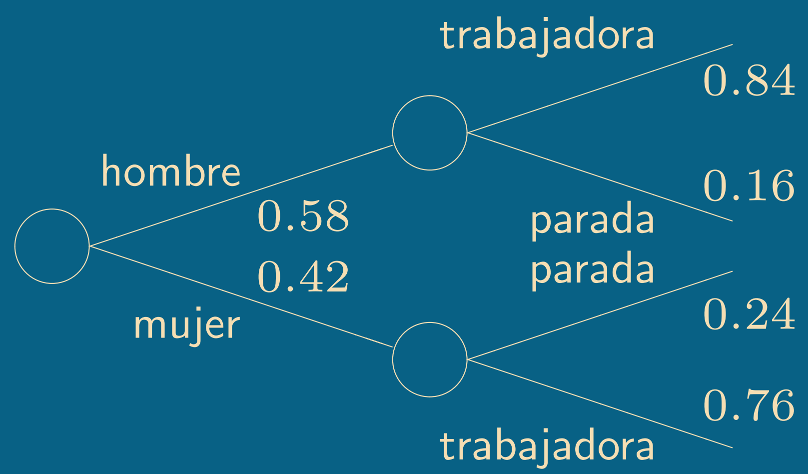
Resolución con árboles de probabilidad

Ahora se dividen las mujeres en trabajadoras y paradas.



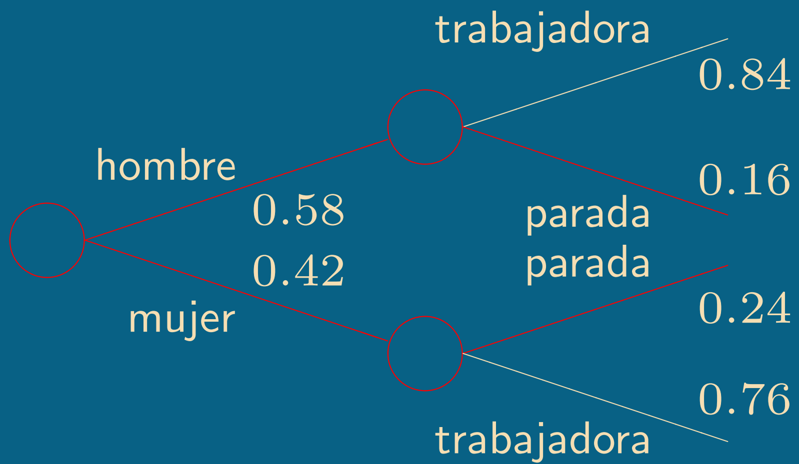
Resolución con árboles de probabilidad

y se hace lo mismo para los hombres.



Resolución con árboles de probabilidad

y al final, miramos las ramas asociadas con parados.

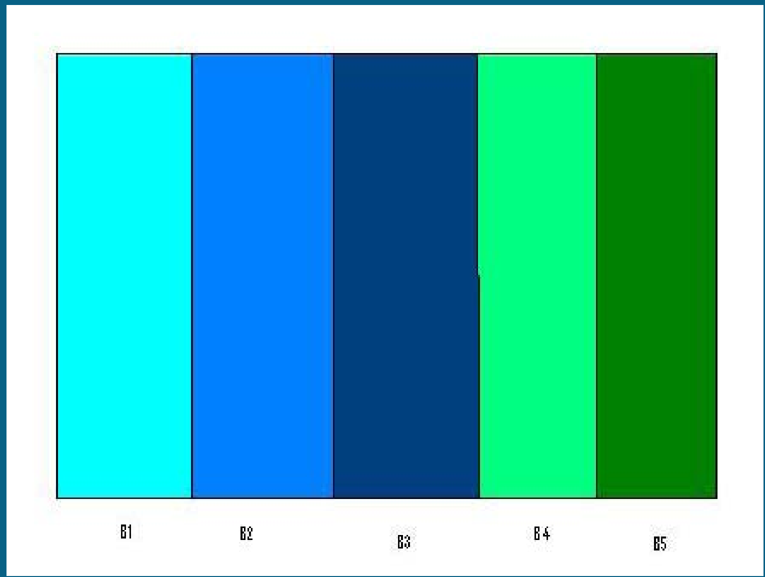


La probabilidad final es

$$p = 0.42 \times 0.24 + 0.58 \times 0.16 = 0.1936$$

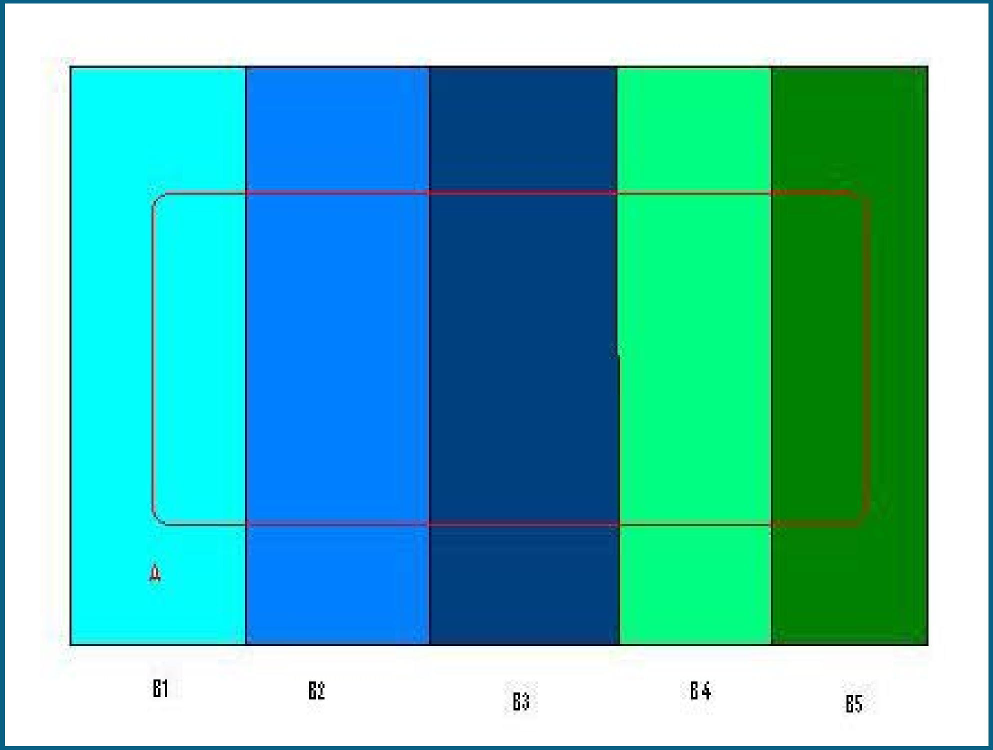
Particiones

Se dicen que una serie de sucesos, $B_1, \ldots, B_k$ forman una *partición* del espacio muestral si todos los sucesos son incompatibles, y luego $B_i \cap B_j = \phi$ para todo $1 \leq i \neq j \leq k$ y si además, $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = \Omega$. Una partición es una división del espacio muestral en distintos bloques.



Generalización de la ley de la probabilidad total

Supongamos que los sucesos $B_1, \ldots, B_k$ forman una partición del espacio muestral. Entonces, para un suceso A, tenemos ...



$$
\begin{aligned}
A &= \bigcup_{i=1}^{k} A \cap B_i \\
P(A) &= \sum_{i=1}^{k} P(A \cap B_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i)
\end{aligned}
$$

Ejemplo

En una fábrica se embalan (en cajas) galletas en 4 cadenas de montaje; A_1*,* A_2*,* A_3 *y* A_4*. El 35% de la producción total se embala en la cadena* A_1 *y el 20%, 24% y 21% en* A_2*,* A_3 *y* A_4 *respectivamente. Los datos indican que no se embalan correctamente un porcentaje pequeño de las cajas; el 1% de* A_1*, el 3% de* A_2*, el 2.5% de* A_3 *y el 2% de* A_4*. ¿Cuál es la probabilidad de que una caja elegida al azar de la producción total sea defectuosa?*

Ejemplo

En una fábrica se embalan (en cajas) galletas en 4 cadenas de montaje; A_1, A_2, A_3 *y* A_4*. El 35% de la producción total se embala en la cadena* A_1 *y el 20%, 24% y 21% en* A_2, A_3 *y* A_4 *respectivamente. Los datos indican que no se embalan correctamente un porcentaje pequeño de las cajas; el 1% de* A_1*, el 3% de* A_2*, el 2.5% de* A_3 *y el 2% de* A_4*. ¿Cuál es la probabilidad de que una caja elegida al azar de la producción total sea defectuosa?*

Sea $D =$ defectuosa. Luego

$$\begin{aligned} P(D) &= \sum_{i=1}^{4} P(D|A_i)P(A_i) \\ &= .01 \times .35 + .03 \times .20 + .025 \times .24 + .02 \times .21 = .0197 \end{aligned}$$

Hay más ejercicios *aquí* y *aquí*.

El teorema de Bayes

Volvemos al ejemplo sobre el paro. Supongamos que se elige un adulto al azar para rellenar un formulario y se observa que no tiene trabajo. ?Cuál es la probabilidad de que la persona elegida sea mujer?

El teorema de Bayes

Volvemos al ejemplo sobre el paro. Supongamos que se elige un adulto al azar para rellenar un formulario y se observa que no tiene trabajo. ?Cuál es la probabilidad de que la persona elegida sea mujer?

Queremos calcular

$$\begin{aligned} P(M|P) &= \frac{P(M \cap P)}{P(P)} \\ &= \frac{P(P|M)P(M)}{P(P)} \\ &= \frac{0.24 \times 0.42}{0.1936} \\ &\approx 0.521 \end{aligned}$$

En resolver este ejercicio, hemos empleado *el teorema* (o *la regla*) *de Bayes*.

Teorema 7

Para dos sucesos, A y B donde $P(A) > 0$, se tiene

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

Demostración

$$\begin{aligned} \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} && \text{por la ley de la multiplicación} \\ &= P(B|A) && \text{por definición de la probabilidad condicionada.} \end{aligned}$$

$\square$

Observamos que podemos escribir el teorema de varias maneras. En primer lugar,

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})}$$

y en segundo lugar, si $B_1, \ldots, B_k$ forman una partición,

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i)}$$

para $j = 1, \ldots, k$.

Volviendo al Ejemplo de las galletas, supongamos que descubrimos que una caja es defectuosa. Calculamos la probabilidad de que la caja provenga de la cadena A_1.

Volviendo al Ejemplo de las galletas, supongamos que descubrimos que una caja es defectuosa. Calculamos la probabilidad de que la caja provenga de la cadena A_1.

$$P(A_1|D) = \frac{P(D|A_1)P(A_1)}{P(D)} = \frac{.01 \times .35}{0.0197} \approx 0.1777$$

Volviendo al Ejemplo de las galletas, supongamos que descubrimos que una caja es defectuosa. Calculamos la probabilidad de que la caja provenga de la cadena A_1.

$$P(A_1|D) = \frac{P(D|A_1)P(A_1)}{P(D)} = \frac{.01 \times .35}{0.0197} \approx 0.1777$$

¿Cuáles son las probabilidades de que provenga de cada de las cadenas 2, 3 y 4?

Ejemplos

Podemos intentar resolver estos dos ejercicios.

Ejemplo 1

Ejemplo 2

El juego de Monty Hall

La *Wikipedia* proporciona una buena descripción del juego.

En *esta página* podemos ver una simulación del juego.

La probabilidad subjetiva

- Probabilidad es una medida del grado de incertidumbre subjetivo de una persona.

- Todos podemos tener nuestras propias (y distíntas) probabilidades.

- Usamos el teorema de Bayes para cambiar nuestras probabilidades.

- Es una definición mucho más amplia de la probabilidad.

- La crítica más general es que perdemos la objetividad.