Críticas

- ¿En qué se basa el supuesto de que la frecuencia vaya a un límite?
- Nunca podemos repetir un experimento tantas veces.
- No es una definición muy útil en la práctica porque no da una medida *a priori* del incertidumbre.
- Sólo permite el uso de la probabilidad en situaciones de experimentos y espacios muestrales claramente definidos.

No obstante, hay muchas situaciones de incertidumbre que no caben en la definición frecuentista de la probabilidad.

¿Había vida en Marte hace un billón de años?

3. MODELOS DE PROBABILIDAD ELEMENTALES

¿Unos dados equilibrados?

Objetivos

Aprender las ideas básicas de la probabilidad clásica y saber aplicar los distintos métodos de conteo como variaciones, permutaciones y combinaciones.

Para leer

Estas dos páginas dan muy buenas explicaciones de la combinatoria.

- *Descartes* sobre combinatoria es muy útil.
- He tomado muchas de las definiciones básicas de la página de *Telepolis*.
- Está página explica como calcular las probabilidades de ganar la Primitiva.

El principio de indiferencia y la probabilidad clásica

Los primeros investigadores no pensaron en la interpretación de probabilidad como frecuencia, sino, basándose en los juegos de dados y cartas, pensaron en los casos favorables frente a los casos desfavorables.

Su interpretación de la probabilidad se basaba en el supuesto de que los juegos eran equilibrados, cuando es natural suponer que todos los posibles resultados son equiprobables.

Laplace (1814) formaliza este idea en el llamado *principio de indiferencia* o de *razón insuficiente*.

El principio de indiferencia

El principio dice:

Si no existe ninguna información contraria, se debe asignar la misma probabilidad a todos los posibles resultados de un experimento

Dado el principio de indiferencia, se tiene que para cualquier suceso elemental, $\omega \in \Omega$, $P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$.

Además, un corolario inmediato es que para cualquier suceso, S, entonces

$$P(S) = \frac{|S|}{|\Omega|},$$

es decir el número de resultados favorables partido por el número de resultados posibles en el experimento.

Ejemplos

Se lanzan dos dados equilibrados. ¿Cuál es la probabilidad de hallar dos seises?

El espacio muestral es

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),\ldots,(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}$$

y $|\Omega| = 36$ y entonces $P(\{6,6\}) = \frac{1}{36}$.

¿Cuál es la probabilidad de que el resultado de la segunda tirada sea mayor que el resultado de la primera?

Si S es el suceso,

$$S = \{(1,2),\ldots,(1,6),(2,3),\ldots,(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}$$

y $P(S) = \frac{15}{36}$.

Los siguientes enlaces van a otros ejemplos:

Ejemplo

Ejemplo

Ejemplo

En el último ejemplo, el conteo de los sucesos elementales empieza a ser tedioso.

En el siguiente ejemplo, calculamos probabilidades conjuntas y individuales.

Se dispone de los registros del número y el tipo de establecimientos que tienen 100 empresarios. Sea X el número de establecimientos que puede ser 1, 2, 3 o 4 e Y el tipo de establecimiento clasificado en Quiosco, Frutería y Bar. La tabla de frecuencias absolutas conjunta para las dos variables es:

		Número de empresas				
		1	2	3	4	Total
Tipo de establecimiento	Quiosco	25	15	8	5	53
	Fruteria	15	6	5	0	26
	Bar	10	4	5	2	21
	Total	50	25	18	7	100

Si se elige uno de los empresarios al azar:

- *¿Cuál es la probabilidad de que tenga 2 empresas quiosqueras?*
- *Hallar la probabilidad de que tenga 2 empresas*
- *Hallar la probabilidad de que tenga por lo menos 1 empresa*
- *Suponiendo que es quiosquero, ¿cuál es la probabilidad de que tenga por lo menos 2 empresas?*

En el último ejemplo hemos calculado una probabilidad condicionada. Ver el tema 4.

Métodos de Conteo

En muchos problemas, es difícil escribir y contar directamente todos los sucesos elementales.

Si tiramos un dado 4 veces y notamos el resultado de cada tirada, ¿cuántos sucesos elementales hay?

$$\Omega = \{(1,1,1,1),(1,1,1,2)\ldots,(6,6,6,5),(6,6,6,6)\}.$$

Se reparten 3 cartas de una baraja española sin reemplazamiento. ¿Cuál es el número de repartos posibles?

El principio de multiplicación

Definimos una lista como una sucesión *ordenada* de objetos, por ejemplo, $(Cara,\ 2,\ Oro)$ donde el primer elemento es el resultado del primer experimento (tirar una moneda), el segundo es el resultado del segundo experimento (lanzar un dado) y la tercera es el resultado del tercer experimento (repartir una carta y ver el palo) etc.

Queremos saber el número de resultados posibles del experimento combinado.

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccc} (Cara,1,Oro) & (Cara,1,Copa) & (Cara,1,Espada) & (Cara,1,Basto) \\ (Cara,2,Oro) & (Cara,2,Copa) & (Cara,2,Espada) & (Cara,2,Basto) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (Cara,6,Oro) & (Cara,6,Copa) & (Cara,6,Espada) & (Cara,6,Basto) \\ (Cruz,1,Oro) & (Cruz,1,Copa) & (Cruz,1,Espada) & (Cruz,1,Basto) \\ (Cruz,2,Oro) & (Cruz,2,Copa) & (Cruz,2,Espada) & (Cruz,2,Basto) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (Cruz,6,Oro) & (Cruz,6,Copa) & (Cruz,6,Espada) & (Cruz,6,Basto) \end{array} \right\}$$

Se tiene que $|\Omega| = 48$. Una manera más fácil de ver el número de sucesos es observar que hay 2 posibilidades ($Cara$, $Cruz$) para el primer experimento, 6 para el segundo $(1, 2, \ldots, 6)$ y 4 para el tercero ($Oros$, $Copas$, $Espadas$, $Bastos$) y que entonces, el número de posibles resultados del experimento combinado será

$$2 \times 6 \times 4 = 48.$$

El *principio fundamental de conteo* o *principio de multiplicación* dice que si consideramos listas de 2 elementos donde existen n_1 posibilidades para el elemento 1 y n_2 para el elemento 2, entonces el número de listas posibles es de $n_1 \times n_2$.

Por extensión, para listas de k elementos donde existen n_i posibilidades para la lista i, entonces el número de listas posibles es

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i.$$

Ejemplos

Tirando el dado 4 veces, ¿cuántos sucesos posibles hay?

$6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$. Observamos que estamos tomando en cuenta el orden de las tiradas y luego $(1, 2, 3, 4)$ no es igual al $(4, 3, 2, 1)$.

Repartiendo 3 cartas de una baraja española, ¿cuántas reparticiones posibles hay?

$40 \times 39 \times 38 = 59280$ reparticiones posibles de las cartas. Igualmente estamos suponiendo que el reparto (1 de Oros, 1 de Espadas, 1 de Copas no es igual al reparto (1 de Espadas, 1 de Copas, 1 de Oros)

Factoriales

Para un número entero positivo, n, se llama factorial de n el producto de los números enteros desde 1 hasta n, es decir

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n.$$

Para el número 0, esta definición no tiene sentido. Se define el factorial de 0 por 1.

Variaciones

En el ejemplo de la baraja española, observamos que el número de reparticiones posibles es de

$$40 \times 39 \times 38 = \frac{40!}{37!} = V_{40}^{3}.$$

Las variaciones sin repetición de n elementos tomados de p en p son las distintas agrupaciones formadas con p elementos distintos, eligiéndolos de entre los n elementos disponibles, considerando una variación distinta a otra tanto si difieren en algún elemento como si están situados en distinto orden.

$$V_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Las variaciones sin repetición corresponden al número de posibles *muestras* donde se eligen p elementos *sin reemplazamiento* de una población de tamaño n.

Las variaciones con repetición de n elementos tomados de p en p son las distintas agrupaciones formadas con p elementos que pueden repetirse, eligiéndolos de entre los n elementos disponibles, considerando una variación distinta a otra tanto si difieren en algún elemento como si están situados en distinto orden.

$$VR_n^p = n^p.$$

Las variaciones con repetición corresponden al número de posibles *muestras* donde se eligen p elementos *con reemplazamiento* de una población de tamaño n.

En el ejemplo de los dados, se ve que el número de sucesos posibles es de $6^4 = VR_6^4$.

El problema de los cumpleaños

¿Si hay k personas en una habitación, cuál es la probabilidad de que por lo menos dos de ellos cumplan el mismo día? ¿Cuántas personas son necesarias para que la probabilidad sea mayor de 0.5*?*

Para simplificar el problema, supongamos que haya 365 días en un año, y que la probabilidad de cumplir es la misma en cada día.

Sea S_k el suceso de que por lo menos 2 de ellos cumplen el mismo día.

$$
\begin{aligned}
P(S_k) &= 1 - P(\bar{S}_k) \\
&= 1 - \frac{\text{número de sucesos donde nadie cumple el mismo día}}{\text{número de sucesos elementales}} \\
&= 1 - \frac{\text{número de sucesos donde nadie cumple el mismo día}}{365^k}
\end{aligned}
$$

porque el denominador es una variación con repetición, VR_{365}^k.

$$P(S_k) = 1 - \frac{\frac{365!}{(365-k)!}}{365^k}$$

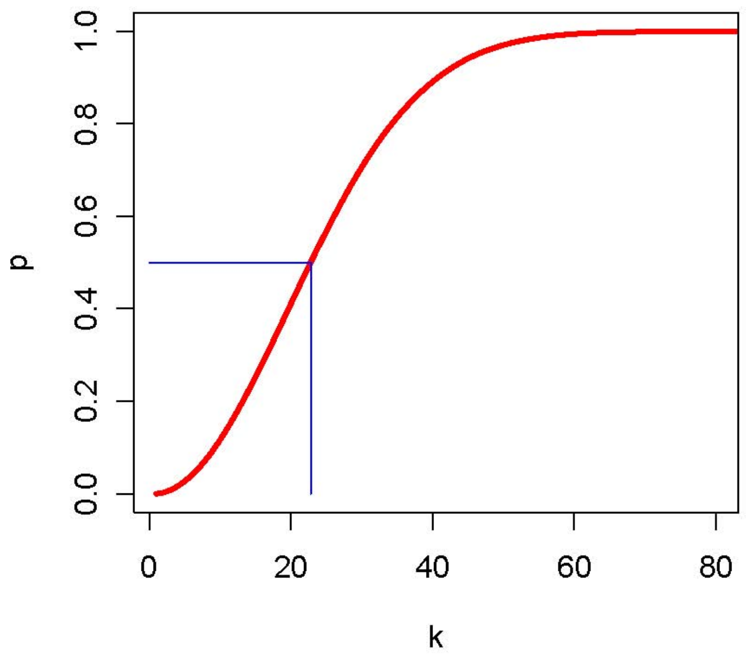
porque el numerador es una variación sin repetición, V_{365}^k.

Entonces, $P(S_k) = 1 - \frac{365!}{(365-k)!365^k}$.

La tabla muestra las probabilidades para $k = 2, \ldots, 10$.

k	$P(S_k)$
2	0.0028
3	0.0082
4	0.0164
5	0.0271
6	0.0405
7	0.0562
8	0.0743
9	0.0946
10	0.1169

El siguiente dibujo muestra las probabilidades para distintos valores de k. Se ha marcado en azul el punto cuando la función es igual a 0.5.



Se tienen $P(S_{22}) = 0.4757$ y $P(S_{23}) = 0.5073$.

Permutaciones

Supongamos que queremos repartir todas las cartas de la baraja española. ¿Cuántas reparticiones posibles hay?

$$40 \times 39 \times \cdots \times 1 = 40! = P_{40}.$$

Las permutaciones sin repetición de n elementos se definen como las distintas formas de ordenar todos esos elementos distintos, por lo que la única diferencia entre ellas es el orden de colocación de sus elementos.

$$P_n = n!.$$

Supongamos que queremos repartir todas las cartas de la baraja pero sólo notando el palo de cada naipe repartido. ¿Cuántas reparticiones distíntas posibles hay?

Elegimos una repartición cualquiera

$$\underbrace{1,2,\ldots,10}_{Oros},\underbrace{1,2,\ldots,10}_{Copas},\underbrace{1,2,\ldots,10}_{Espadas},\underbrace{1,2,\ldots,10}_{Bastos}$$

Obviamente, esta repartición es igual a

$$\underbrace{2,1,\ldots,10}_{Oros},\underbrace{2,1,\ldots,10}_{Copas},\underbrace{2,1,\ldots,10}_{Espadas},\underbrace{2,1,\ldots,10}_{Bastos}$$

y el número de reparticiones de forma

$$\underbrace{O,O,\ldots,O}_{Oros},\underbrace{C,C,\ldots,C}_{Copas},\underbrace{E,E,\ldots,E}_{Espadas},\underbrace{B,B,\ldots,B}_{Bastos}$$

es de $10!10!10!10!$.

Entonces, el número total de repeticiones distintas será

$$\frac{40!}{10!10!10!10!} = 4705360871073570227520 = PR_{40}^{10,10,10,10}.$$

Llamamos a *las permutaciones con repetición* de n elementos tomados de n_1 en n_1, de n_2 en n_2, hasta de n_k en n_k, donde $n_1 + \ldots + n_k = n$ cuando en los n elementos existen elementos repetidos (un elemento aparece n_1 veces, el segundo n_2 veces, y el k-ésimo n_k veces). El número de estas permutaciones es

$$PR_n^{n_1,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}.$$

Combinaciones

Supongamos que queremos lanzar una moneda 20 veces ¿Cuántos sucesos posibles hay para los cuales el número de cruces sea igual a x?

Si $x = 0$ entonces hay 1 suceso posible: $(cruz, \ldots, cruz)$.

Para $x = 1$ hay 20 sucesos posibles:

$$(cara, cruz, \ldots, cruz), (cruz, cara, \ldots, cruz), \ldots, (cruz, cruz, \ldots, cara).$$

Para $x = 2$ hay $PR_{20}^{2,18} = 190$ posibilidades.

En general hay $PR_{20}^{x,20-x}$ posibles sucesos.

Las *combinaciones sin repetición* de n elementos tomados de p en p son las distintas agrupaciones formadas con p elementos distintos, eligiéndolos de entre los n elementos de que disponemos, considerando una variación distinta a otra sólo si difieren en algún elemento. (No influye el orden de colocación de sus elementos).

Se tiene

$$C_n^p = \left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array} \right) = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

De vez en cuando, también se ven combinaciones que pueden repetirse.

Las *combinaciones con repetición* de n elementos tomados de p en p se definen como las distintas agrupaciones formadas con p elementos que pueden repetirse, eligiéndolos de entre los n elementos de que disponemos, considerando una variación distinta a otra sólo si difieren en algún elemento, (No influye el orden de colocación de sus elementos).

$$CR_n^p = \binom{n+p-1}{p}.$$

Estos ejemplos son muy útiles para ver si hemos entendido bien las diferencias entre variaciones permutaciones y combinaciones.

La probabilidad binomial

Considerar el experimento de tirar una moneda n veces y recordar el resultado de cada tirada. Entonces, obviamente por el principio de la multiplicación, el espacio muestral contiene 2^n sucesos elementales o secuencias de caras y cruces, ω_i, para $i = 1, \ldots, 2^n$.

Si la moneda es insesgada, entonces, por el principio de indiferencia, es razonable suponer que cada uno de estos sucesos tiene la misma probabilidad, $P(\omega_i) = \frac{1}{2^n}$.

Supongamos que queremos calcular la probabilidad del suceso $S =$ observar exactamente x cruces.

Luego, la probabilidad de S es

$$\begin{aligned}
P(S) &= \frac{\text{número de secuencias elementales con } x \text{ cruces y } n-x \text{ caras}}{\text{número de sucesos elementales}} \\
&= \frac{\left(\begin{array}{c} n \\ x \end{array}\right)}{2^n} \\
&= \left(\begin{array}{c} n \\ x \end{array}\right) \frac{1}{2}^n \quad \text{para } x = 0, 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Esta probabilidad es un caso particular de la probabilidad binomial que se estudiará en más detalle en el tema 6.

La probabilidad de ganar en la Primitiva

En la Primitiva un jugador selecciona 6 números distintos de 1 a 49. Si estos números coinciden con los 6 números ganadores, el jugador gana el primer premio. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?

El juego consiste en adivinar 6 números de 49 posibles. Dos de estos boletos son diferentes cuando lo es algún elemento. Es decir los boletos 6 – 13 – 23 – 34 – 45 – 47 y 6 – 34 – 45 – 13 – 23 – 47 son el mismo. Dicho boleto es una combinación de seis elementos de las posibles que se pueden formar con los números $1, 2, 3, 4, \ldots, 49$. El número de las mismas es

$$C_{49}^{6} = \left(\begin{array}{c} 49 \\ 6 \end{array} \right) = \frac{49!}{6!43!} = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 13983816.$$

Luego, la probabilidad de ganar es

$$\frac{\text{número de combinaciones ganadoras}}{\text{número de posibles combinaciones}} = \frac{1}{13983816}$$

casi uno en catorce millones.

El premio de segunda categoría se otorga cuando se aciertan 5 de los 6 números de la combinación ganadora más el llamado complementario, un número extraído al azar de entre los 43 que no forman parte de dicha combinación. Calculamos la probabilidad de ganar este premio.

Como hay que acertar 5 de los 6 números premiados, el número de posibles boletos son combinaciones de 6 elementos tomados de 5 en 5, es decir $C_6^5 = 6$ multiplicado por combinaciones de 1 elemento tomado 1 en 1, es decir $C_1^1 = 1$, y luego hay 6 posibles combinaciones ganadoras.

Entonces, la probabilidad de ganar el segundo premio es de $6/13983816 \approx 0.000000429$, por debajo de uno en dos millones.

¿Cuál es la probabilidad de ganar el tercer premio, acertando 5 números sólo?

En este caso, hay $C_6^5 = 6$ combinaciones que contienen 5 de los 6 números premiados y sabemos que el otro número no debe ser premiado y no puede ser el complementario y entonces quedan 42 bolas y $C_{42}^1 = 42$ combinaciones generadoras de este. Luego, por el principio de la multiplicación, el número de combinaciones ganadoras es de $6 \times 42 = 252$ y la probabilidad de ganar el tercer premio es de $252/13983816 \approx 0.000018$.

Probabilidades hipergeométricas

¿Cuál es la probabilidad de que te toquen exactamente 4 de los 6 números de la Primitiva?

Hay $C_6^4 = 15$ maneras de seleccionar entre los números premiados y $C_{43}^2 = 903$ maneras de seleccionar dos números de entre los números no premiados, y luego las combinaciones ganadoras son $15 \times 903 = 13545$ y la probabilidad de ganar es de $13545/13983816 \approx 0.000969$.

Esta probabilidad es un ejemplo de una probabilidad hipergeométrica.

Supongamos que una urna contiene N bolas de las cuales R son rojas y $N-R$ azules. Si sacamos n bolas sin reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de sacar r bolas rojas?

Hay C_N^n distíntas reparticiones.

Hay C_N^n combinaciones de bolas muestreadas posibles. Además, hay C_R^r maneras de arreglar las r bolas rojas muestreadas entre las R bolas y hay C_{N-R}^{R-r} maneras de incluir las bolas rojas no muestreadas entre las bolas rojas. Luego, la probabilidad de sacar r bolas rojas es de

$$P(r) = \frac{C_R^r \times C_{N-R}^{R-r}}{C_N^n} = \frac{\begin{pmatrix} R \\ r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-R \\ n-r \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}.$$

Observamos que

$$
\begin{aligned}
P(r) &= \frac{\frac{R!}{r!(R-r)!}\frac{(N-R)!}{(n-r)!(N-R-n+r)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} \\
&= \frac{n!}{r!(n-r)!}\frac{(N-n)!}{(R-r)!(N-n-R+r)!}\frac{R!(N-R)!}{N!} \\
&= \frac{\left(\begin{array}{c} n \\ r \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} N-n \\ R-r \end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c} N \\ R \end{array}\right)}
\end{aligned}
$$

es decir que hay C_N^R maneras de dividir las bolas en rojas y azules, y C_n^r maneras de dividir las bolas muestreadas en rojos y azules y C_{N-n}^{R-r} de dividir las bolas no muestreadas en rojas y azules.

Se estudiará la distribución hipergeométrica en más detalle en el tema 6.

Críticas de la probabilidad clásica

- Una definición limitada de la probabilidad.

  Hay muchas situaciones cuando creemos que un suceso elemental es más probable que otros. Un intento de resolver este problema es la probabilidad lógica.

- Imposible de aplicar con espacios muestrales infinitos o continuos.

  En este caso, $|\Omega| = \infty$ y para cualquier suceso elemental, ω se tiene $P(\omega) = 0$ que no tiene sentido.