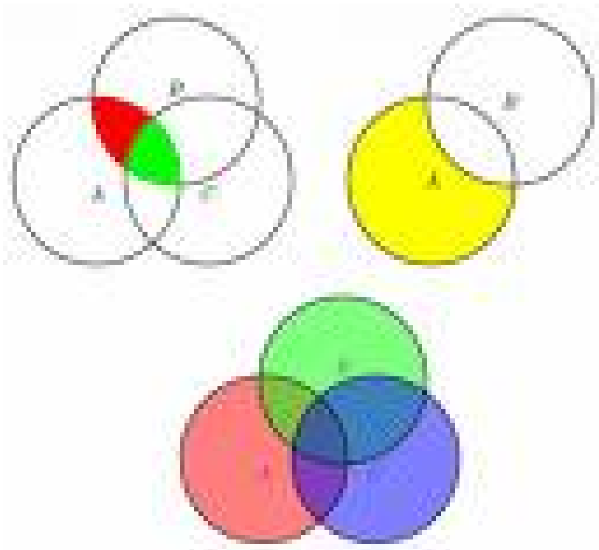
2. CONCEPTOS BÁSICOS DE LA PROBABILIDAD



Un diagrama de Venn

Objetivos

Introducir los conceptos básicos de experimentos y sucesos, y la definición axiomática y propiedades de la probabilidad.

Para leer

Secciones 1-3 en:

`http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/28/matematicas-28.html`

Secciones 1-4 de la materia sobre probabilidad en:

`http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0278-01/inicio.html`

Índice

a) Fenómeno aleatorio, espacio muestral, relaciones entre sucesos.

b) Conjuntos y diagramas de Venn.

c) Axiomática de Kolmogorov.

d) Propiedades elementales de la probabilidad.

e) Interpretación de probabilidad como frecuencia.

Definiciones básicas

Como comentado anteriormente, la probabilidad trata de medir el incertidumbre. A menudo, las situaciones de incertidumbre surgen cuando hacemos *experimentos* o *fenómenos aleatorios*.

Ejemplos de experimentos:

a) Lanzar una moneda dos veces y anotar los resultados de cada tirada.

b) Lanzar dos dados y anotar la suma de los puntos obtenidos.

c) Observar el número de cartas que recibe una empresa en una semana.

d) Medir la tasa de inflación al final del año.

El espacio muestral y los sucesos elementales

El *espacio muestral*, Ω, es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento. A los elementos de Ω se denominan *elementos* o *sucesos elementales*.

a) $\Omega = \{XX, XC, CX, CC\}$.

b) $\Omega = \{2, 3, \ldots, 12\}$.

c) $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

d) $\Omega = (-\infty, \infty)$.

El espacio muestral puede ser discreta (*a)*,*b)*,*c)*) o continuo (*d)* y finito (*a)*,*b)*) o infinito (*c)*,*d)*).

Sucesos

Un *suceso*, S, es cualquier subconjunto del espacio muestral.

a) Las dos tiradas salen distíntas: $S = \{XC, CX\}$.

b) La suma es un número primo: $S = \{2, 3, 5, 7, 11\}$.

c) Se reciben menos de 100 cartas: $S = \{0, 1, 2, \ldots, 99\}$.

d) Hay deflación: $S = (-\infty, 0)$.

Dos sucesos importantes son el *suceso imposible* o vacio, $\phi = \{\}$ y el *suceso seguro*, Ω.

El conjunto de sucesos

Se puede definir el conjunto, σ, de todos los sucesos posibles.

a)

$$\begin{aligned}\sigma &= \{\phi, \{XX\}, \{XC\}, \{CX\}, \{CC\}, \{XX, XC\}, \{XX, CX\}, \{XX, CC\}, \\ &\quad \{XC, CX\}, \{XC, CC\}, \{CX, CC\}, \{XX, XC, CX\}, \\ &\quad \{XX, CX, CC\}, \{XC, CX, CC\}, \Omega\}\end{aligned}$$

El número de sucesos en S es de $|\sigma| = 32$.

¿Cuál es el tamaño de σ?

Obviamente, si el espacio muestral es infinito o continuo, el número de subconjuntos del espacio será infinito. Pero ¿qué pasa en el caso finito?

$$\Omega = \{1\} \Rightarrow \sigma = \{\phi, \{1\}\} \Rightarrow |\sigma| = 2$$

$$\Omega = \{1, 2\} \Rightarrow \sigma = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \Rightarrow |\sigma| = 4$$

$$\Omega = \{1, 2, 3\} \Rightarrow \sigma = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

y luego $|\sigma| = 8$.

Más generalmente, si Ω contiene n elementos, entonces $|\sigma| = 2^n$.

Conjuntos y diagramas de Venn

Operaciones con sucesos

- *Unión*. Para dos sucesos, S_1 y S_2 entonces $S_1 \cup S_2$ es el suceso formado por todos los sucesos elementales en S_1 y S_2.

- *Intersección*. $S_1 \cap S_2$ es el suceso formado por todos los elementos que son, a la vez de S_1 y S_2.

  Dos sucesos se llaman *incompatibles* si no tienen ningún elemento en común, es decir que $S_1 \cap S_2 = \phi$.

- *Diferencia*. $S_1 \setminus S_2$ es el suceso formado por todos los sucesos elementales en S_1 que no son de S_2.

- *Suceso contrario*. El suceso $\overline{S} = \Omega \setminus S$ es el suceso contrario de S.

  Obviamente, se tiene $S_1 \setminus S_2 = S_1 \cap \overline{S}_2$.

b) $S =$ *la suma es número primo.* $V =$ *la suma es mayor de 6.*
Entonces:

$$\begin{aligned}
S &= \{2,3,5,7,11\} \\
V &= \{7,8,9,10,11,12\} \\
S \cup V &= \{2,3,5,7,8,9,10,11,12\} \\
S \cap V &= \{7,11\} \\
S \setminus V &= \{2,3,5\} \\
V \setminus S &= \{8,9,10,12\} \\
\overline{S} &= \{4,6,8,9,10,12\} \\
\overline{V} &= \{2,3,4,5,6\}
\end{aligned}$$

Intentamos resolver este ejemplo.

Propiedades de las operadores

Las operaciones de unión e intersección cumplen ciertas propiedades, resumidas *aquí*.

Se pueden utilizar estas propiedades para demostrar algunos resultados sobre conjuntos.

Lema 1

Para dos sucesos, S_1 y S_2 se tiene:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= (S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap \overline{S}_2) \\
&= (S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \setminus S_2)
\end{aligned}
$$

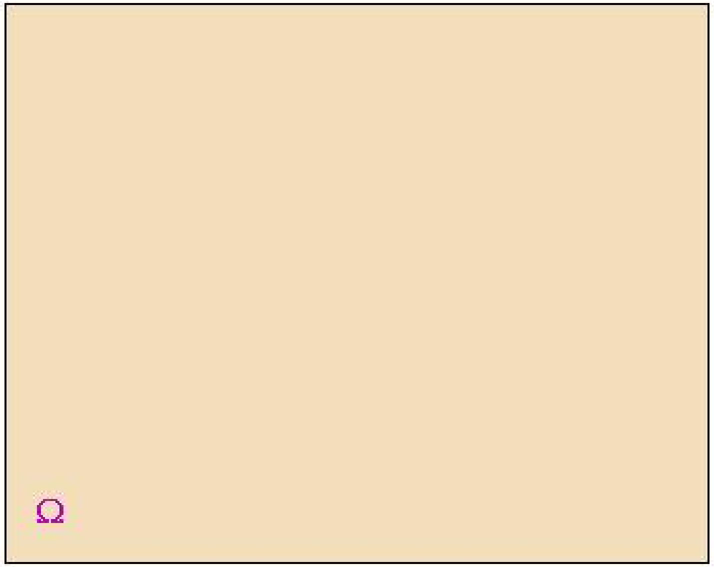
Proof Utilizando la ley distributiva,

$$\begin{aligned}
\overbrace{(S_1 \cap S_2)}^{A} \cup (\overbrace{S_1}^{B} \cap \overbrace{\overline{S}_2}^{C}) &= ((S_1 \cap S_2) \cup S_1) \cap ((S_1 \cap S_2) \cup \overline{S}_2) \\
&= S_1 \cap ((S_1 \cap S_2) \cup \overline{S}_2) \quad \text{usando la simplificación} \\
&= (S_1 \cap (S_1 \cap S_2)) \cup (S_1 \cap \overline{S}_2) \quad \text{la ley distributiva} \\
&= (S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap \overline{S}_2)
\end{aligned}$$

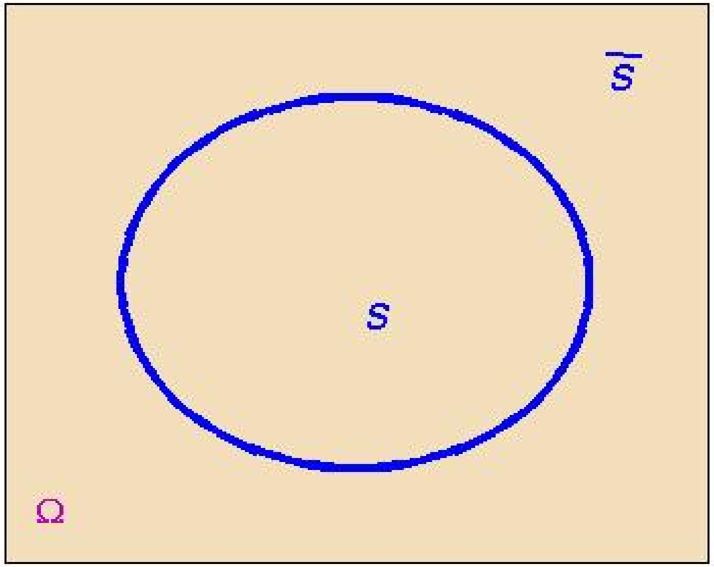
■

Diagramas de Venn

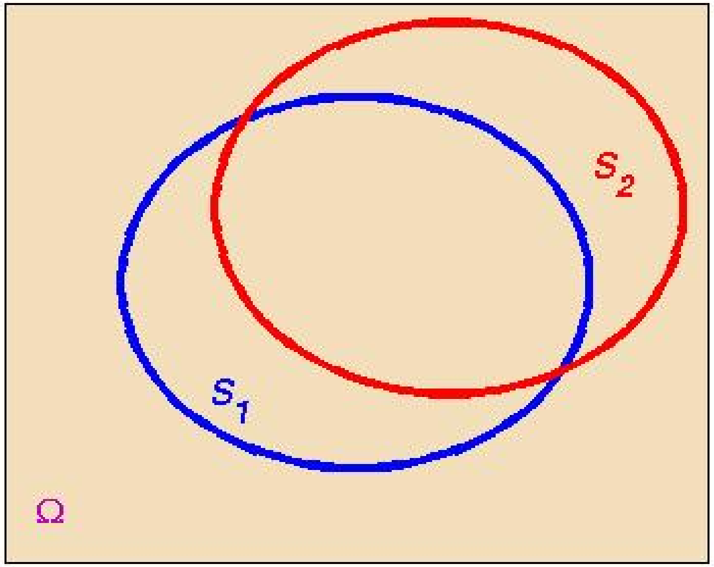
Se representa el espacio muestral con un cuadro.



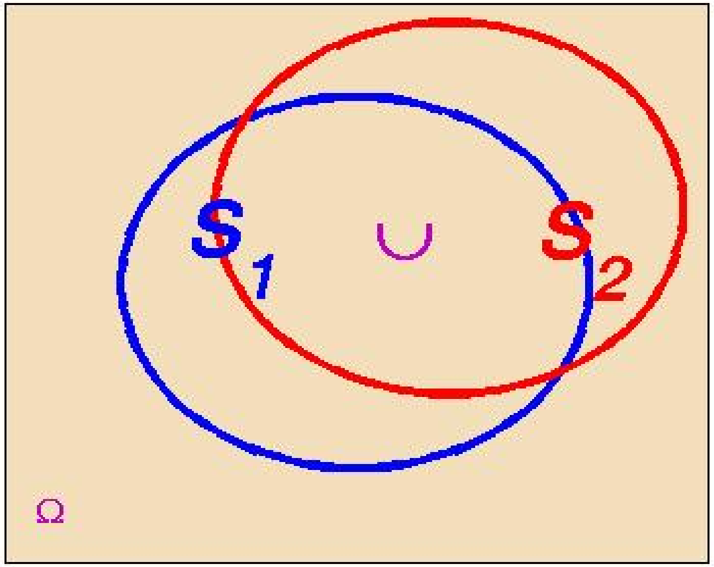
y los sucesos con círculos.



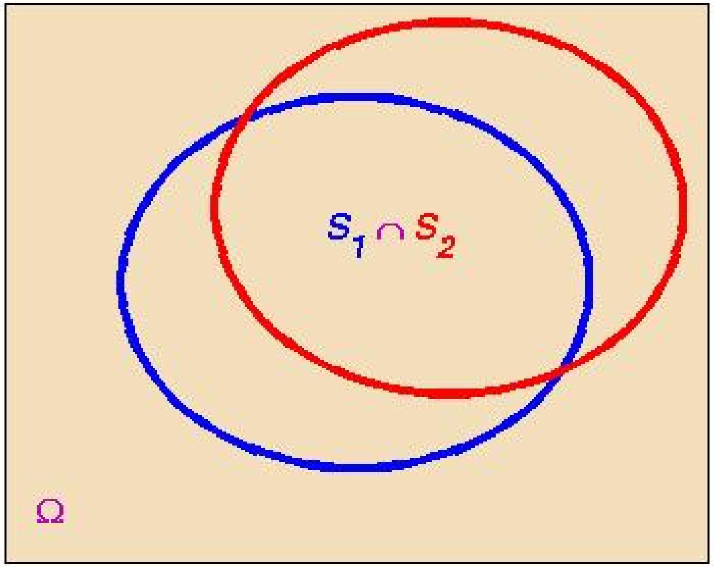
Se pueden incluir varios sucesos a la vez.



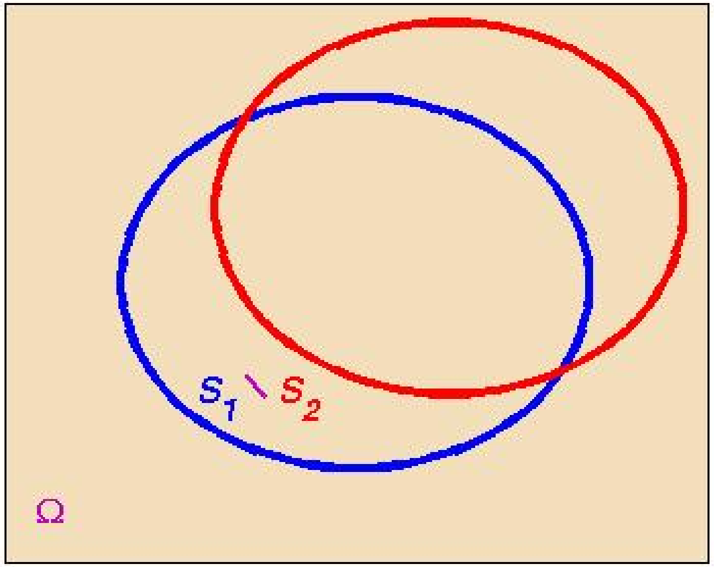
y ilustrar los distíntos componentes.



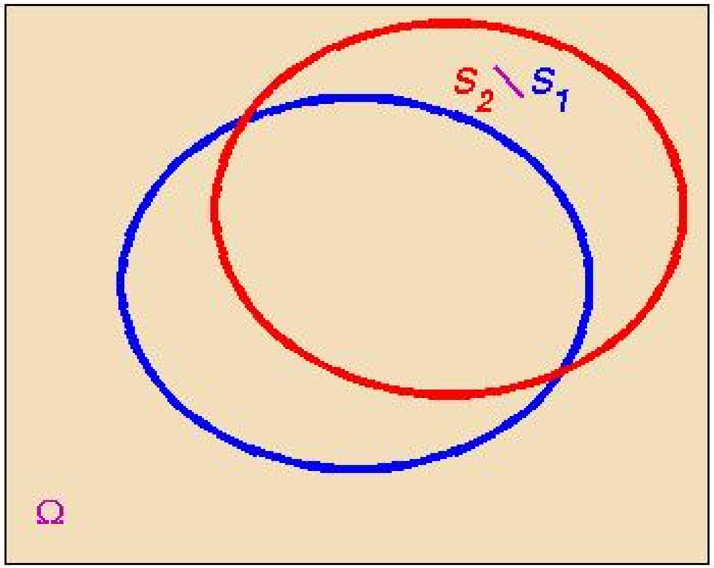
y ilustrar los distíntos componentes.



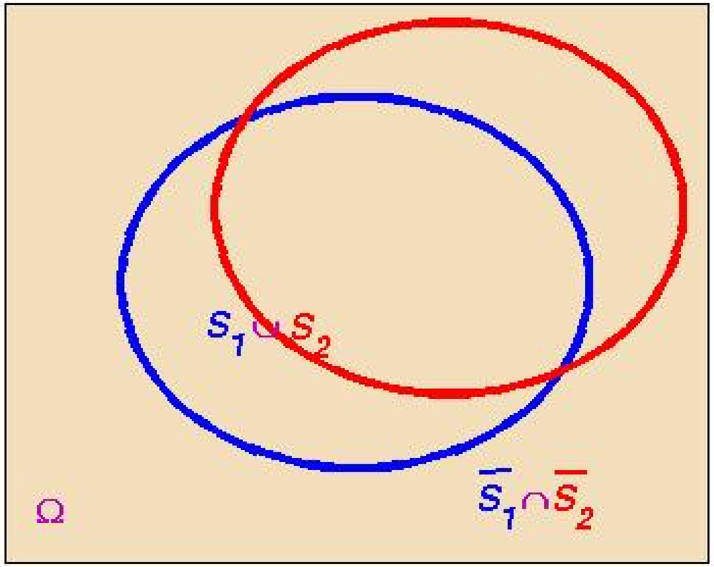
y ilustrar los distíntos componentes.



y ilustrar los distíntos componentes.



y verificar algunas reglas de conjuntos.



Uno de las *leyes de De Morgan* dice que $\overline{S_1 \cup S_2} = \overline{S}_1 \cap \overline{S}_2$.
El otro dice que $\overline{S_1 \cap S_2} = \overline{S}_1 \cup \overline{S}_2$.

Probabilidad

Hay muchas interpretaciones de la probabilidad:

- La interpretación clásica: para juegos justos.
- La interpretación frecuentista: probabilidad como frecuencia.
- La interpretación subjetiva: probabilidad como grado de creencia.
- La interpretación lógica: extendiendo la interpretación clásica
- Propensiones.

Todas las interpretaciones (salvo quizás propensiones) cumplen las mismas leyes o axiomas de Kolmogorov.

Los axiomas de Kolmogorov

Dado un espacio muestral, Ω, una σ-*álgebra* de subconjuntos, σ, entonces la función $P : \sigma \rightarrow \mathbb{R}$ es una *función de probabilidad* sobre (Ω, σ) si cumple los siguientes axiomas:

1. $P(S) \geq 0$ para cualquier suceso S.

2. $P(\Omega) = 1$.

3. Si $S_1, S_2, \ldots, S_n$ son sucesos incompatibles, entonces

$$P(S_1 \cup S_2 \cup \ldots, S_n) = \sum_{i=1}^{n} P(S_i).$$

Propiedades elementales de la probabilidad

Se utilizan las leyes de la probabilidad y la teoría de conjuntos para demostrar las propiedades de la probabilidad.

Teorema 1

$$P(\overline{S}) = 1 - P(S).$$

Proof Para cualquier suceso, S, se tiene $\Omega = S \cup \overline{S}$ y luego

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= P(S \cup \overline{S}) \\ 1 &= P(S) + P(\overline{S}) \quad \text{por axiomas 2 y 3} \\ P(\overline{S}) &= 1 - P(S) \end{aligned}$$

∎

Corolario 1

$$P(\phi) = 0.$$

Proof Ejercicio. ∎

Corolario 2
Para cualquier suceso, S, se tiene $0 \leq P(S) \leq 1$.

Proof Dado que $P(\overline{S}) \geq 0$ por el axioma 1, el Teorema 1 implica que $P(S) \leq 1$ y entonces, para cualquier suceso S, se sabe que $0 \leq P(S) \leq 1$. ∎

La probabilidad de $S_1 \cup S_2$

Teorema 2

$$P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2)$$

Proof En primer lugar, observamos que

$$\begin{aligned}
S_1 &= (S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap \overline{S}_2) \quad \text{por el Lema 1} \\
&= (S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \setminus S_2) \quad \text{y entonces} \\
P(S_1) &= P\left((S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \setminus S_2)\right) \\
&= P(S_1 \cap S_2) + P(S_1 \setminus S_2) \quad \text{por el axioma 3, y entonces} \\
P(S_1 \setminus S_2) &= P(S_1) - P(S_1 \cap S_2).
\end{aligned}$$

Igualmente, $P(S_2 \setminus S_1) = P(S_2) - P(S_1 \cap S_2)$.

$$\begin{aligned}
S_1 \cup S_2 &= (S_1 \setminus S_2) \cup (S_1 \cap S_2) \cup (S_2 \setminus S_1) \\
P(S_1 \cup S_2) &= P\left((S_1 \setminus S_2) \cup (S_1 \cap S_2) \cup (S_2 \setminus S_1)\right) \\
&= P(S_1 \setminus S_2) + P(S_1 \cap S_2) + P(S_2 \setminus S_1) \quad \text{por el axioma 3} \\
&= (P(S_1) - P(S_1 \cap S_2)) + P(S_1 \cap S_2) + (P(S_2) - P(S_1 \cap S_2)) \\
&= P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2)
\end{aligned}$$

■

Ejemplo

En una baraja hemos suprimido varia cartas. Entre las que quedan, se dan las siguientes probabilidades de ser extraídas:

$$P(REY) = 0.15, P(BASTOS) = 0.3, P(carta\ que\ no\ sea\ REY\ ni\ BASTOS) = 0.6$$

¿Está entre ellas el REY de BASTOS? En caso afirmativo, da su probabilidad.

Se tiene $\overline{R} \cap \overline{B} = \overline{R \cup B}$ por la ley de De Morgan. Luego, $P(R \cup B) = 1 - 0.6 = 0.4$.

Ahora, por el Teorema 2, se tiene $P(R \cup B) = P(R) + P(B) - P(R \cap B)$ y entonces $0.4 = 0.3 + 0.15 - P(R \cap B)$, es decir que $P(R \cap B) = 0.05$.

Extendiendo el argumento: $P(S_1 \cup S_2 \cup S_3)$ etc.

$$\begin{aligned} P(S_1 \cup S_2 \cup S_3) &= P(S_1) + P(S_2) + P(S_3) \\ &\quad - P(S_1 \cap S_2) - P(S_1 \cap S_3) - P(S_2 \cap S_3) \\ &\quad + P(S_1 \cap S_2 \cap S_3) \end{aligned}$$

Demostrando este resultado utilizando la teoría de conjuntos es un lío pero:

Proof

$$
\begin{aligned}
S_1 \cup S_2 \cup S_3 &= S_1 \cup (S_2 \cup S_3) \\
P(S_1 \cup S_2 \cup S_3) &= P(S_1) + P(S_2 \cup S_3) - P(S_1 \cap (S_2 \cup S_3)) \\
&= P(S_1) + P(S_2) + P(S_3) - P(S_2 \cap S_3) - \\
&\quad P((S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap S_3)) \\
&= P(S_1) + P(S_2) + P(S_3) - P(S_2 \cap S_3) \\
&\quad - (P(S_1 \cap S_2) + P(S_1 \cap S_3) - P((S_1 \cap S_2) \cap (S_1 \cap S_3))) \\
&= P(S_1) + P(S_2) + P(S_3) \\
&\quad -P(S_1 \cap S_2) - P(S_1 \cap S_3) - P(S_2 \cap S_3) \\
&\quad +P(S_1 \cap S_2 \cap S_3)
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Se puede hacer el resultado para cuatro sucesos (o más)

$$
\begin{aligned}
P(S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4) \quad = \quad & \sum_{i=1}^{4} P(S_i) - \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=2:j>i}^{4} P(S_i \cap S_j) \\
& + \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=2:j>i}^{4} \sum_{k=3:k>j}^{4} P(S_i \cap S_j \cap S_k) \\
& - P(S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4)
\end{aligned}
$$

Ejercicios

Demostar que para dos sucesos A y B, se tiene

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B).$$

Se tiene

$$\begin{aligned} 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) &= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\ &= 1 - P(A \cup B) \quad \text{por el Teorema 2} \\ &= P(\overline{A \cup B}) \quad \text{por el Teorema 1} \\ &= P(\bar{A} \cap \bar{B}) \quad \text{por la ley de De Morgan.} \end{aligned}$$

Demostrar que la probabilidad de que ocurra exactamente uno de los sucesos A y B es

$$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

Recordamos que para un suceso E, se tiene

$$\begin{aligned}
E &= (E \cap F) \cup (E \cap \bar{F}) && \text{usando la Lema 1 y luego} \\
P(E) &= P(E \cap F) + P(E \cap \bar{F}) && \text{porque los dos sucesos son incompatibles, y} \\
P(E \cap \bar{F}) &= P(E) - P(A \cap F) && \text{reordenando.}
\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) &= [P(A) - P(A \cap B)] + [P(B) - P(A \cap B)] \\
&= P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) \\
&= P\left((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)\right)
\end{aligned}$$

que es la probabilidad de que exactamente uno de los dos sucesos ocurra.

La interpretación frecuentista de la probabilidad

Claramente, las *frecuencias relativas* o proporciones cumplen las mismas propiedades que las probabilidades.

Además, se observa que si se repite un experimento muchas veces, por ejemplo *tiradas de una moneda*, entonces la frecuencia relativa *de cruces* tiende a acercarse a un límite. Ver el *COIN TOSS LLN Experiment* de SOCR.

Formalmente, supongamos que se puede repetir un experimento aleatoria bajo las mismas condiciones. Entonces, se define la probabilidad de un suceso, S, como

$$P(S) = \lim_{i \to \infty} \frac{n_i(S)}{i} = f_i(S)$$

donde $n_i(S)$ es el número de veces que ocurre S en i repeticiones del experimento y $f_i(S)$ es la frecuencia relativa.

Críticas

- ¿En qué se basa el supuesto de que la frecuencia vaya a un límite?

- Nunca podemos repetir un experimento tantas veces.

- No es una definición muy útil en la práctica porque no da una medida *a priori* del incertidumbre.

- Sólo permite el uso de la probabilidad en situaciones de experimentos y espacios muestrales claramente definidos.

  No obstante, hay muchas situaciones de incertidumbre que no caben en la definición frecuentista de la probabilidad.

¿Había vida en Marte hace un billón de años?