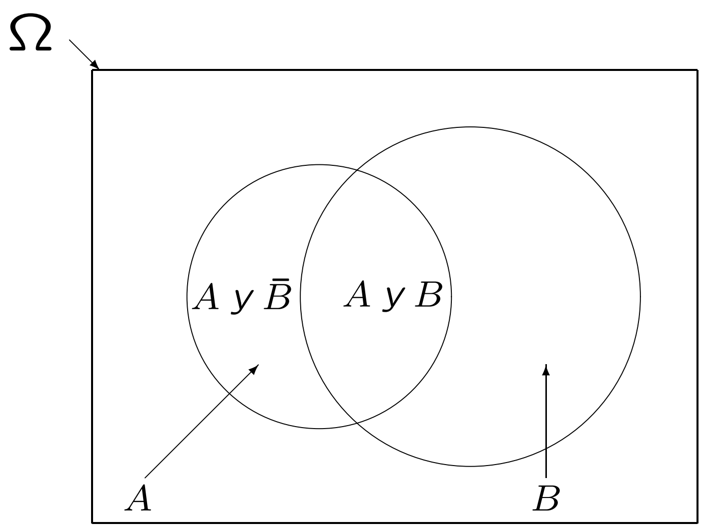
En el Ejemplo 122, hemos aplicado otra regla útil de la probabilidad.

Teorema 8 *Para dos sucesos A y B, se tiene*

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B}).$$

Demostración



Mirando el diagrama Venn, vemos que

$$A = (A \text{ y } B) \cup (A \text{ y } \bar{B})$$

Luego:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \text{ y } B) + P(A \text{ y } \bar{B}) \\ &= P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B}) \end{aligned}$$

aplicando la ley de multiplación en cada caso.

$\diamond$

Ejemplo 124 *El 42 % de la población activa de cierto pais está formada por mujeres. Se sabe que un 24 % de las mujeres y un 16 % de los hombres están en el paro.*

¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar de la poblacción activa en esta pais esté en el paro?

¿Cuál es la probabilidad de que tenga trabajo?

Sea P el suceso de que la persona esté en el paro. Sea M el suceso de que sea mujer y H el suceso de que sea hombre.

Luego sabemos que

$$\begin{aligned} P(M) &= 0{,}42 \\ P(H) &= P(\bar{M}) \\ &= 1 - P(M) = 0{,}58 \\ P(P|M) &= 0{,}24 \\ P(P|H) &= 0{,}16 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} P(P) &= P(P|M)P(M) + P(P|H)P(H) \\ &= 0{,}24 \times 0{,}42 + 0{,}16 \times 0{,}58 \\ &= 0{,}1936 \end{aligned}$$

Ahora $P(\bar{P}) = 1 - P(P) = 0{,}8064$ *es la probabilidad de que tenga trabajo.*

Ejemplo 125 *Un 3 % de la población adulta de un pais africano padecen a beri beri. Existe una prueba diagnóstica para detectar si una persona tiene la enfermedad o no, pero es imperfecta. La prueba tiene un 10 % de falsos positivos (es decir que para gente sana, hay una probabilidad de 10 % de que la prueba diga que es enferma) y 5 % de falsos negativos (hay una probabilidad de 5 % de que identifique un enfermo como sano).*

Si se elige una persona para la prueba aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que la prueba le dé un resultado positivo?

Sea B = tiene beri beri y S = la prueba da un resultado positivo. Luego:

$$\begin{aligned} P(B) &= 0{,}03 \\ P(S|\bar{B}) &= 0{,}10 \\ P(\bar{S}|B) &= 0{,}05 \end{aligned}$$

Queremos hallar $P(S)$.

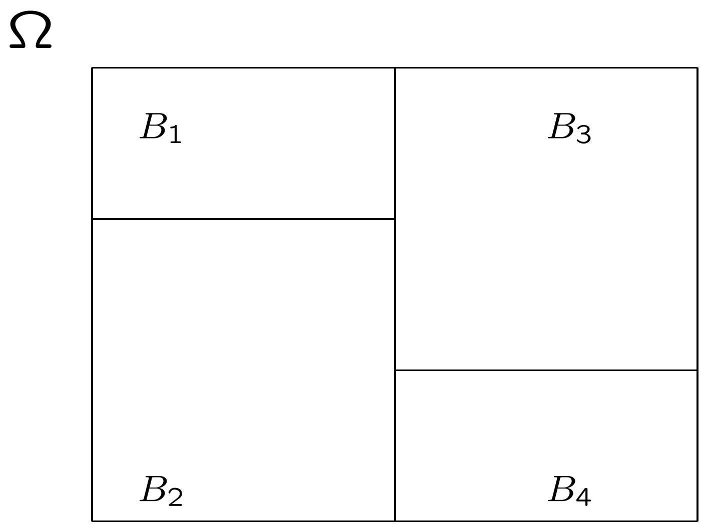
$$P(S) = P(S|B)P(B) + P(S|\bar{B})P(\bar{B})$$

Tenemos $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0{,}97$ *y* $P(S|B) = 1 - P(\bar{S}|B) = 0{,}95$. *Entonces*

$$P(S) = 0{,}95 \times 0{,}03 + 0{,}10 \times 0{,}97 = 0{,}1255$$

Una descomposición más general

Consideramos el siguiente diagrama de Venn.



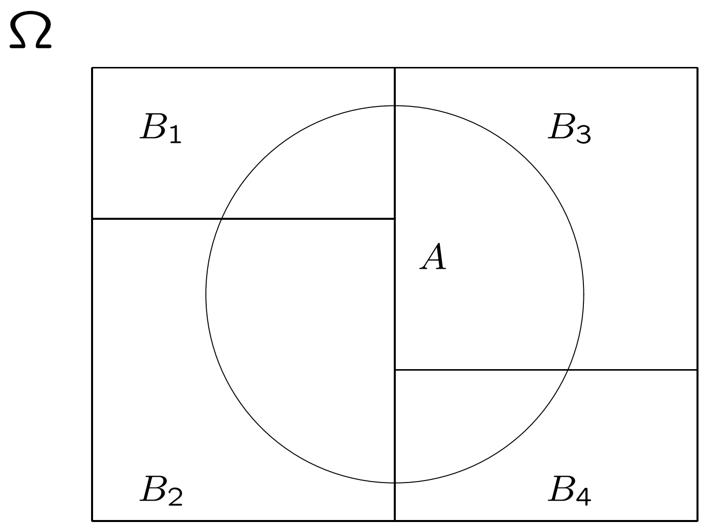
Los sucesos $B_1, \ldots, B_4$ dividen el espacio muestral en 4 partes distíntas.

Definición 28 *Un conjunto de sucesos* $B_1, \ldots, B_k$ *donde* $B_i \cap B_j = \phi$ *para todo* $i \neq j$ *y*

$$\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \ldots B_k$$

se llama una **partición** *del espacio muestral.*

Ahora supongamos que introducimos otro suceso A



Tenemos

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3) \cup (A \cap B_4)$$

Luego como los B_i son incompatibles,

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) + P(A \cap B_4)$$

y usando la ley de multiplicación,

$$\begin{aligned} P(A \cap B_i) &= P(A|B_i)P(B_i) \quad \text{para } i = 1, \ldots, 4 \\ P(A) &= \sum_{i=1}^{4} P(A|B_i)P(B_i) \end{aligned}$$

La ley de la probabilidad total

Teorema 9 *(Ley de la probabilidad total)*

Para un suceso A y sucesos $B_1, \ldots, B_k$, donde $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k = \Omega$ y $B_i \cap B_j = \phi$ para todo $i \neq j$, entonces

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i)$$

Ejemplo 126 *En una fábrica se embalan (en cajas) galletas en 4 cadenas de montaje; A_1, A_2, A_3 y A_4. El 35 % de la producción total se embala en la cadena A_1 y el 20 %, 24 % y 21 % en A_2, A_3 y A_4 respectivamente. Los datos indican que no se embalan correctamente un porcentaje pequeño de las cajas; el 1 % de A_1, el 3 % de A_2, el 2.5 % de A_3 y el 2 % de A_4. ¿Cuál es la probabilidad de que una caja elegida al azar de la producción total sea defectuosa?*

Sea $D =$ *defectuosa. Luego*

$$\begin{aligned} P(D) &= \sum_{i=1}^{4} P(D|A_i)P(A_i) \\ &= ,01 \times ,35 + ,03 \times ,20 + ,025 \times ,24 + \\ &\quad + ,02 \times ,21 \\ &= ,0197 \end{aligned}$$

El teorema (o la regla) de Bayes

Teorema 10 *Para dos sucesos A y B, se tiene*

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Demostración

Por la regla de multiplicación, se tiene

$$\begin{aligned} P(A \text{ y } B) &= P(A|B)P(B) \quad \text{y igualmente} \\ P(A \text{ y } B) &= P(B|A)P(A) \quad \text{y luego} \\ P(A|B) &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \end{aligned}$$

$\diamond$

Ejemplo 127 *Volvemos al Ejemplo 124. Supongamos que se elige un adulto al azar para rellenar un formulario y se observa que no tiene trabajo. ?Cuál es la probabilidad de que la persona elegida sea mujer?*

Necesitamos calcular $P(M|P)$*. Mediante el teorema de Bayes, tenemos*

$$\begin{aligned} P(M|P) &= \frac{P(P|M)P(M)}{P(P)} \\ &= \frac{0{,}24 \times 0{,}42}{0{,}1936} \approx 0{,}5207 \end{aligned}$$

Ejemplo 128 *Retomando el Ejemplo 125 supongamos que la prueba le da positivo a la persona. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga beri beri?*

$$
\begin{aligned}
P(B|S) &= \frac{P(S|B)P(B)}{P(S)} \text{ por el teorema de Bayes} \\
&= \frac{0{,}95 \times 0{,}03}{0{,}1255} \approx 0{,}2271
\end{aligned}
$$

¿Y si la prueba da negativa?

$$
\begin{aligned}
P(B|\bar{S}) &= \frac{P(\bar{S}|B)P(B)}{P(\bar{S})} \\
&= \frac{0{,}05 \times 0{,}03}{1 - 0{,}1255} \\
&\approx 0{,}0017
\end{aligned}
$$

Ejemplo 129 *Volviendo al Ejemplo 126, supongamos que descubrimos que una caja es defectuosa. Calculamos la probabilidad de que la caja provenga de la cadena A_1.*

$$
\begin{aligned}
P(A_1|D) &= \frac{P(D|A_1)P(A_1)}{P(D)} \\
&= \frac{,01 \times ,35}{,0197} \\
&\approx ,1777
\end{aligned}
$$

Igualmente $P(A_2|D) = \frac{,03 \times ,20}{,0197} \approx ,3046$ *y también,* $P(A_3|D) = \frac{,025 \times ,24}{,0197} \approx ,3046$.

Finalmente mediante el teorema de Bayes,

$$P(A_4|D) = \frac{,02 \times ,21}{,0197} \approx ,2132$$

o más facilmente,

$$
\begin{aligned}
P(A_4|D) &= 1 - P(A_1|D) - P(A_2|D) - P(A_3|D) \\
&= 1 - ,1777 - ,3046 - ,3046 \approx ,2132
\end{aligned}
$$

Ejemplo 130 *3 prisioneros, Andrés, Bruno y Carlos han solicitado la libertad condicional. Se sabe que el gobernador va a poner en libertad a uno de los tres pero el no va a decir quien hasta finales del mes. El gobernador dice a Andrés que puede informarle del nombre de un solicitante sin exíto dadas las siguientes condiciones.*

1. *Si se va a liberar a Andrés, el gobernador dirá Bruno o Carlos con la misma probabilidad* $(1/2)$*.*

2. *Si se libera a Bruno, dirá el nombre de Carlos.*

3. *Si Carlos es el que se va a liberar, dirá Bruno.*

Andrés pide al gobernador que le cuente su rollo y el gobernador creyendo que su información es inútil dice a Andrés que Bruno se va a quedar en la carcel.

Andrés piensa "mi probabilidad de que me pongan en libertad ha cambiado de 1/3 *a* 1/2*. Estoy muy contento."*

¿Tiene razón?

Sean A, B,C *los sucesos de que Andrés, Bruno y Carlos respectivamente estén puestos en libertad. Sea* b *el suceso de que el gobernador diga el nombre de Bruno.*

Se tiene:

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$$

porque sólo uno de los tres va a salir de la carcel.

Además, sabiendo que el gobernador ha dicho el nombre de Bruno, se tiene

$$P(b|A) = 1/2, \quad P(b|B) = 0, \quad P(b|C) = 1.$$

Entonces, mediante el teorema de Bayes,

$$\begin{aligned} P(A|b) &= \frac{P(b|A)P(A)}{P(b)} \\ &= \frac{P(b|A)P(A)}{P(b|A)P(A) + P(b|B)P(B) + P(b|C)P(C)} \\ &= \frac{1/2 \times 1/3}{1/2 \times 1/3 + 0 \times 1/3 + 1 \times 1/3} \\ &= 1/3 \end{aligned}$$

¡Andrés no tiene razón!

Pregunta del examen (parte)

Ejemplo 131 *(Examen de junio de 2004)*

Al responder a un examen de elección multiple, un estudiante o sabe la respuesta o la responde al azar. Si responde al azar tiene una probabilidad de $1/5$ *de acertar porque cada pregunta tiene 5 respuestas posibles. Por estudios anteriores en exámenes de este estilo, el estudiante sabe las respuestas a un 40 % de las preguntas.*

a) ¿Cuál es la probabilidad de que responda correctamente a una pregunta? *(0,5 puntos)*

b) Suponiendo que el estudiante haya acertado, calcular la probabilidad de que supiese la respuesta. *(0,75 puntos)*