

5. PROBABILIDAD

Objetivo

Aprender el concepto de la probabilidad y las reglas básicas de probabilidades para sucesos. Entender la probabilidad condicionada.

Bibliografía recomendada

Peña y Romo (1997), Capítulos 13 y 14.

En el idioma habitual, usamos frases como:

Es probable que gane Madrid hoy

Mañana lloverá seguro.

Es posible que te llamen pero lo dudo.

En todas estas frases, explicamos un sentido de incertidumbre sobre sucesos aleatorios. Ahora queremos formalizar la idea del azar y probabilidad.

Conceptos básicos

La probabilidad de un suceso es una medida numérica de la posibilidad de que ocurra. La idea es relevante en situaciones donde el azar juega un papel importante.

En primer lugar, definimos el concepto de un experimento aleatorio y sus posibles resultados.

Definición 22 *Un experimento aleatorio es el proceso de observar un fenómeno cuyos posibles resultados son inciertos. Se supone que se saben todos los posibles resultados del experimento de antemano y que se puede repetir el experimento en condiciones idénticas.*

Ejemplo 105 *Lanzar una moneda y observar si sale cruz o cara.*

Definición 23 *El espacio muestral (Ω) es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento.*

Ejemplo 106 *Si el experimento es lanzar la moneda una vez, el espacio muestral es $\Omega = \{C, X\}$ donde C significa cara y X cruz. Si el experimento es lanzar la moneda dos veces, el espacio muestral es $\{(C, C), (C, X), (X, C), (X, X)\}$ donde (C, X) es el suceso de que la primera tirada sea cara y la segunda cruz.*

Definición 24 *Los posibles resultados del experimento o componentes del espacio muestral (e_i) se llaman **sucesos elementales**:*

$$\Omega = \{e_1, \dots, e_k\}$$

Ejemplo 107 En el caso de lanzar la moneda dos veces, los sucesos elementales son $e_1 = (C, C)$, $e_2 = (C, X)$, $e_3 = (X, C)$ y $e_4 = (X, X)$.

Definición 25 Un **suceso** es un conjunto de sucesos elementales.

Ejemplo 108 En el caso de lanzar la moneda dos veces, el suceso $A =$ “sale exactamente una cara” es

$$A = \{(C, X), (X, C)\}.$$

El suceso $B =$ “la primera tirada es cara” es

$$B = \{(C, C), (C, X)\}.$$

Dos sucesos importantes son el **suceso seguro** $= \Omega$, es decir todo el espacio muestral y el **suceso imposible** $= \phi$, el conjunto vacío. Además, para cada suceso A , podemos definir $\bar{A} =$ **el suceso contrario de A** , es decir

$$\bar{A} = \Omega \setminus A = \{e_i : e_i \notin A\}$$

Observamos que $\Omega = A \cup \bar{A}$ y que $A \cap \bar{A} = \phi$.

Ejemplo 109

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \{(C, C), (X, X)\} \\ \bar{B} &= \{(X, C), (X, X)\}\end{aligned}$$

Para dos sucesos, A , B definimos el suceso **A y B** como el conjunto de sucesos elementales contenidos en A y B , es decir A y $B = A \cap B$. Si ocurre el suceso A y B , sabemos que se han ocurrido ambos sucesos.

Dos sucesos A y B que no pueden ocurrir a la vez ($A \cap B = \phi$) se llaman sucesos **incompatibles**.

Al contrario se dice que ha ocurrido el suceso **A o B** si se ocurre por lo menos uno de dos sucesos, es decir que A o $B = A \cup B$.

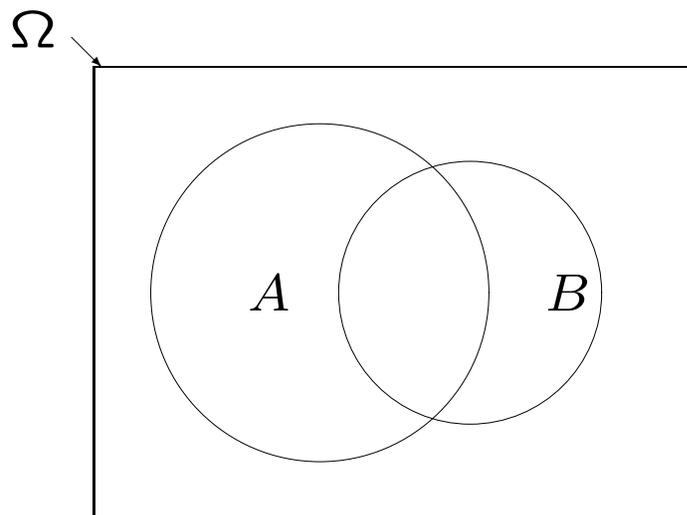
Ejemplo 110

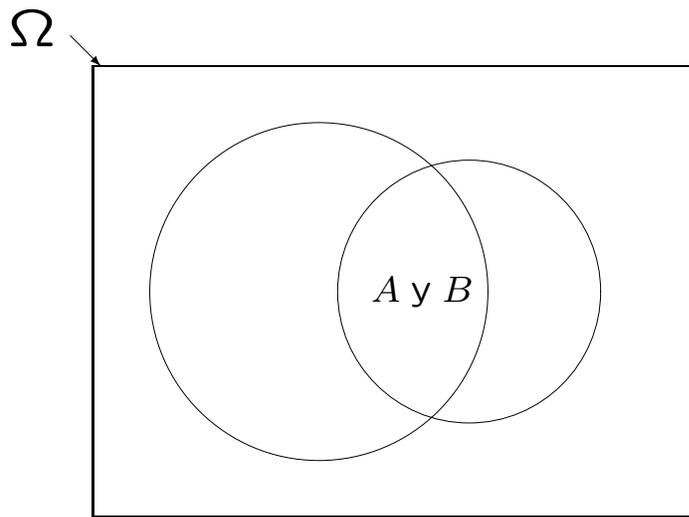
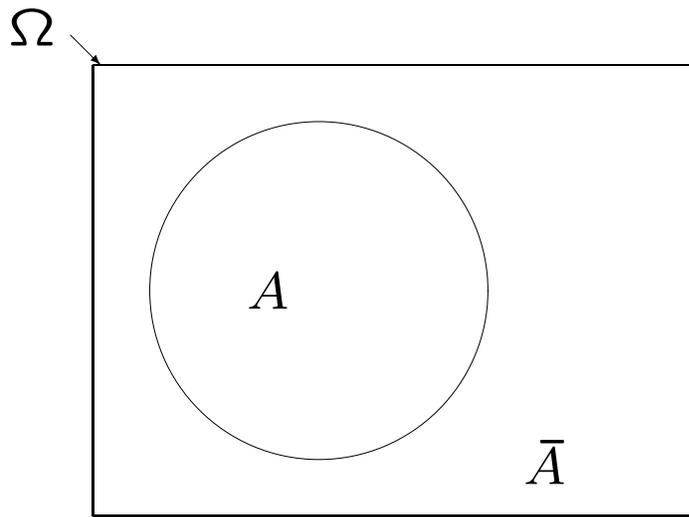
$$\begin{aligned}A \text{ y } B &= \{(C, X)\} \\ A \text{ o } B &= \{(C, C), (C, X), (X, C)\}\end{aligned}$$

A y B no son sucesos incompatibles.

Diagramas de Venn

Una manera visual de ver los distintos sucesos es a través del diagrama de Venn.

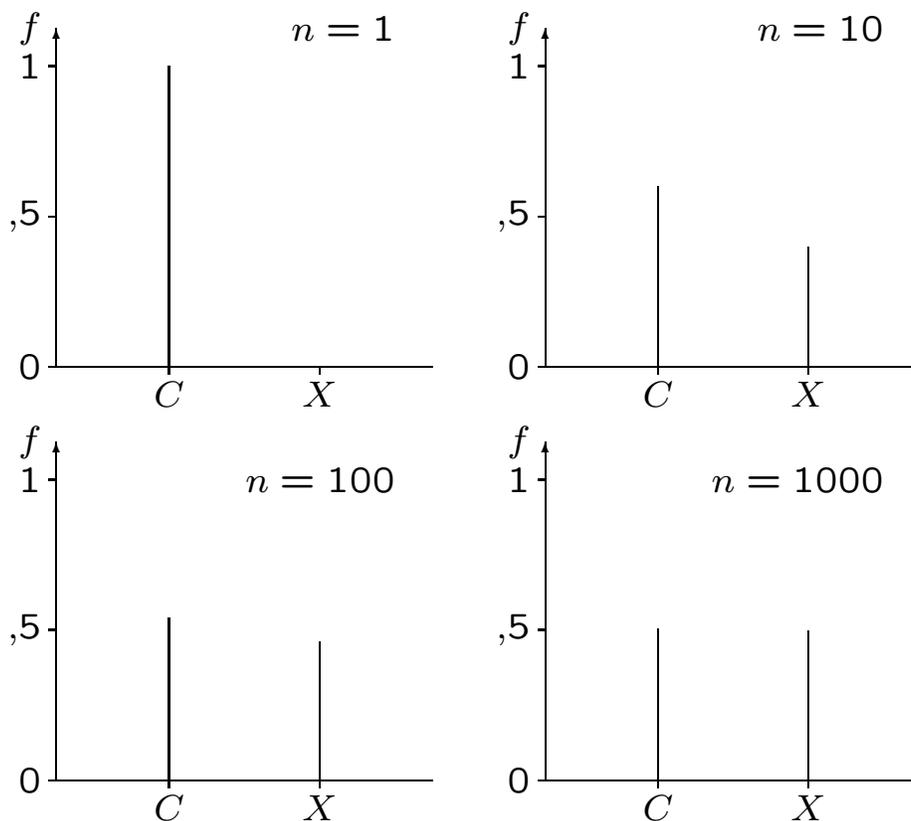




Frecuencia y probabilidad

Todavía no hemos definido la probabilidad de un suceso. El método más frecuente es usar la idea de frecuencias relativas.

Ejemplo 111 *Definimos el experimento de tirar una moneda una vez. Repetimos el experimento un número n de veces y calculamos las frecuencias relativas de cada suceso elemental.*



En el ejemplo, se ve que las frecuencias relativas se acercan a un límite cuando se repite el experimento muchas de veces. El valor del límite es la **probabilidad del suceso**.

Para un suceso A se escribe $P(A)$ para representar su probabilidad.

Se han definido las probabilidades como límites de frecuencias, y se puede deducir las siguientes propiedades básicas que poseen las probabilidades. Se tiene:

- Para cualquier suceso A , $0 \leq P(A) \leq 1$.
- $P(A) = \sum_{i:e_i \in A} P(e_i)$
- $P(\Omega) = 1$
- Si A y B son sucesos incompatibles (es decir que $A \cap B = \phi$) entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

De estas tres propiedades, se deduce que si \bar{A} es el suceso complementario a A ,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Demostración

A y \bar{A} son sucesos incompatibles y entonces

$$P(A \text{ o } \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

Pero $\Omega = A \text{ o } \bar{A}$ es decir que $A \text{ o } \bar{A}$ es un suceso seguro y entonces

$$1 = P(A \text{ o } \bar{A}).$$

Luego el resultado sigue inmediatamente. \diamond

Inmediatamente podemos concluir que como $\phi = \bar{\Omega}$, entonces $P(\phi) = 0$, es decir que el suceso imposible es de verdad imposible.

Ejemplo 112 Supongamos que un experimento tiene 4 sucesos elementales, e_1, \dots, e_4 y que

$$P(e_1) = 0,2 \quad P(e_2) = 0,3 \quad P(e_3) = 0,4$$

1. ¿Cuál es $P(e_4)$?
2. Si $A = e_1$ o e_2 hallar $P(A)$ y $P(\bar{A})$.
3. Si $B = e_3$ hallar $P(\bar{B})$
4. Calcular $P(A \text{ o } B)$.

1.

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= 1 \\ &= P(\{e_1, \dots, e_4\}) \\ &= \sum_{i=1}^4 P(e_i) \\ &= 0,2 + 0,3 + 0,4 + P(e_4) \\ P(e_4) &= 0,1 \end{aligned}$$

2. $P(A) = 0,2 + 0,3 = 0,5$. $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,5$.

3. $P(B) = 0,4 \Rightarrow P(\bar{B}) = 0,6$.

4. *A y B son incompatibles y entonces $P(A \text{ o } B) = 0,5 + 0,4 = 0,9$.*

Espacios equiprobables

En algunas situaciones, la definición del experimento asegura que todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad de ocurrir. En este caso, se dice que el espacio muestral es equiprobable.

Si el espacio muestral es equiprobable y contiene k sucesos elementales,

$$\Omega = \{e_1, \dots, e_k\}$$

luego se tiene

$$P(e_i) = \frac{1}{k} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k.$$

Para cualquier suceso A entonces, la probabilidad de A es

$$P(A) = \frac{1}{k} \times \text{número de sucesos elementales en } A.$$

Ejemplo 113 *Supongamos que se lanza una moneda **equilibrada** dos veces. Luego hay cuatro sucesos elementales,*

$$(C, C), (C, X), (X, C), (X, X)$$

cada suceso con probabilidad $\frac{1}{4}$.

Entonces, la probabilidad de observar $A =$ exactamente una cara es

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{(C, X), (X, C)\}) \\ &= 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Además, la probabilidad de que la primera tirada sea cara es $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

¿Cuál es la probabilidad de que la primera tirada sea cruz?

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

La probabilidad subjetiva

Se han visto anteriormente dos ideas para definir probabilidades: via frecuencias relativas y además el caso de espacios equiprobables. Existe otra enfoque completamente distinto que define la probabilidad como una medida subjetiva de incertidumbre sobre la aparición de un suceso. Así nuestras probabilidades para algún suceso pueden ser distintos, ya que tenemos diferentes cantidades de información.

En este caso, se pueden definir probabilidades para experimentos irrepetibles.

Ejemplo 114 *¿Cuál es la probabilidad de que naciera yo en el 1965?*