La distribución geométrica

Hemos visto que si se tira una moneda (con $p = P(\text{cruz})$) n veces, entonces el número de cruces se distribuye como binomial.

Consideramos otro experimento relacionado. Vamos a sequir tirando la moneda hasta que veamos la primera cruz ?Cuántas tiradas necesitamos?

Sea X el número de tiradas. Luego

$$
\begin{aligned}
P(X=1) &= p \\
P(X=2) &= (1-p)p \\
P(X=3) &= (1-p)^2 p \\
\vdots &= \vdots \\
P(X=x) &= (1-p)^{x-1} p
\end{aligned}
$$

La distribución de X se llama la distribución geométrica.

Definición 39 *Una variable X tiene una distribución* **geométrica con parámetro** p *si*

$$P(X = x) = (1-p)^{x-1}p \quad \textit{para } x = 1, 2, \ldots$$

En este caso, se escribe $X \sim G(p)$.

Teorema 14 *Si $X \sim G(p)$, luego $E[X] = \frac{1}{p}$, $V[X] = \frac{1-p}{p^2}$ y $DT[X] = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$.*

Ejemplo 161 *Volvemos al Ejemplo 155.*

¿Cuál es la probabilidad de que Ronaldo marque por primera vez en su quinto penalti?

¿Cuál es el número esperado de penaltis que necesita para marcar?

Sea X el número de penaltis que necesita para marcar su primer gol. Luego $X \sim G(0{,}8)$.

$$P(X = 5) = 0{,}2^4 \times 0{,}8 = {,}00128$$

La esperanza de X es $1/0{,}8 = 1{,}2$ penaltis.

Ejemplo 162 *En el Ejemplo 154, supongamos que se va a inspeccionar piezas hasta encontrar la primera pieza defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que se necesiten inspeccionar 4 o menos piezas para encontrar la primera pieza defectuosa?*

Sea Y *el número de inspecciones necesarios. Luego* $Y \sim G(0{,}03)$.

$$\begin{aligned} P(Y \leq 4) &= \sum_{y=1}^{4} P(Y = y) \\ &= \sum_{y=1}^{4} 0{,}97^{y} \times 0{,}03 \\ &\approx 0{,}115 \end{aligned}$$

El número esperado de inspecciones necesarias sería $1/0{,}03 = 33.\dot{3}$.

Pregunta de examen

Ejemplo 163 *(junio de 2003) Andrés y Pedro se plantean el siguiente juego: se lanza al aire un dado equilibrado con seis caras numeradas de uno a seis. Se considera que el jugador gana cuando el resultado del dado es cuatro o seis, y recibe diez euros. En otro caso, no recibe nada. Cada apuesta (un lanzamiento) es de cinco euros.*

1) Si Andrés juega en cinco ocasiones, ¿cuál es la probabilidad de que acierte a lo sumo una vez? ¿Cuál es el número medio de aciertos en esas cinco ocasiones?

3) Pedro jugará tantas veces como sea necesario hasta conseguir acertar una vez. Calcular la probabilidad de que tenga que jugar al menos tres veces. Obtener el número medio de veces que tiene que jugar para conseguir su objetivo.

4) ¿Cuál será el beneficio medio obtenido por cada jugador?

1) Sea X el número de aciertos de Andrés. Luego

$$X \sim B\left(5, \frac{1}{3}\right)$$

$$P(X=1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\tfrac{1}{3}\right)^1 \left(\tfrac{2}{3}\right)^4 = \tfrac{80}{243} \approx 0{,}329.$$

2) El número medio de aciertos es $5 \times \frac{1}{3} \approx 1{,}67$.

3) Sea Y el número de jugadas necesarios.

$$\begin{aligned} Y &\sim G(1/3) \\ P(Y \geq 3) &= 1 - P(Y < 3) \\ &= 1 - \{P(Y=1) + P(Y=2)\} \\ &= 1 - \left\{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right\} \\ &= \frac{4}{9} = 0{,}4\dot{4} \end{aligned}$$

El número medio de jugadas necesarias es

$$\frac{1}{1/3} = 3.$$

4) El beneficio medio de Andrés sería

$$\frac{5}{3} \times 10 - 5 \times 5 = -\frac{25}{3}$$

es decir que en promedio, Andrés pierde 8,33 *euros.*

El beneficio medio de Pedro es

$$10 - 5 \times 3 = -5$$

y entonces, en promedio, Pedro pierde 5 euros.

Sucesos raros y la distribución de Poisson

La distribución del número de "sucesos raros" (llamadas de teléfono, emisiones de partículos radioactivos, accidentes de tráfico, número de erratas) que ocurren en un periodo fijo del tiempo (una hora, un segundo, un año, una página) es la llamada distribución Poisson. Esta distribución tiene un parámetro λ que representa el número medio de accidentes por unidad de tiempo.

Definición 40 *Una variable X tiene una distribución* **Poisson con parámetro** λ *si*

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad \textit{para } x = 0, 1, 2, \ldots$$

En este caso, se escribe $X \sim P(\lambda)$.

Teorema 15 *Si* $X \sim P(\lambda)$*, luego* $E[X] = \lambda$*,* $V[X] = \lambda$ *y* $DT[X] = \sqrt{\lambda}$*.*

Ejemplo 164 *El número medio de erratas por transparencia es* 1,2*. ¿Cuál es la probabilidad de que en una transparencia no haya erratas?*

Sea X *el número de erratas. Luego* $X \sim P(1{,}2)$*.*

$$P(X = 0) = \frac{1{,}2^0 e^{-1{,}2}}{0!} = e^{-1{,}2} \approx 0{,}301$$

¿Y la probabilidad de que haya 2 o más erratas?

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \left\{ \frac{1{,}2^0 e^{-1{,}2}}{0!} + \frac{1{,}2^1 e^{-1{,}2}}{1!} \right\} \\ &\approx 0{,}34 \end{aligned}$$

Teorema 16 *Si $X \sim P(\lambda)$ es el número de sucesos raros en una unidad de tiempo e Y representa el número de sucesos raros en un tiempo t, entonces*

$$Y \sim P(t\lambda).$$

Ejemplo 165 *En promedio, hay 50 incendios serios cada año en la provincia de Chimbomba. ?Cuál es la probabilidad de que no haya ningún incendio mañana?*

El número medio de incendios por día es $\frac{50}{364} \approx 0{,}137$. Luego, la probabilidad de cero incendios mñana es

$$\frac{0{,}137^0 e^{-0{,}137}}{0!} \approx 0{,}872$$

Ejemplo 166 *Volvemos al Ejemplo 164. Supongamos que escribo 10 transparencias para un curso. ¿Cuál es la probabilidad de que contengan por lo menos una errata?*

Sea Y el número de erratas. Luego

$$E[Y] = 10 \times 1{,}2 = 12$$

e $Y \sim P(12)$.

$$\begin{aligned} P(Y > 0) &= 1 - P(Y = 0) \\ &= 1 - \frac{12^0 e^{-12}}{0!} \\ &\approx 0{,}999994 \end{aligned}$$

Tablas de la distribución Poisson

Igual que con la distribución binomial, hay tablas de la distribución Poisson para varias valores de λ.

Ejemplo 167 *Si $X \sim P(3)$, hallamos $P(X = 2)$ y $P(X \geq 2)$.*

$$
\begin{aligned}
P(X = 2) &= 0{,}2240 \\
P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\
&= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\
&= 1 - 1 - 0{,}0498 - 0{,}1494 \\
&= 0{,}8008
\end{aligned}
$$

Aproximación de la distribución binomial con una distribución Poisson

Sea $X \sim B(n,p)$ donde p es pequeña y n grande. Luego

$$\begin{aligned} P(X=x) &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\ &\approx \frac{(np)^x e^{-np}}{x!} \\ &= P(Y=x) \quad \text{donde } Y \sim P(np). \end{aligned}$$

El resultado implica que para n grande ($n > 50$) y p pequeño, ($p <$ 0,1) entonces se pueden aproximar probabilidades binomiales a través de la distribución Poisson.

Ejemplo 168 *Sea* $X \sim B(100, 0{,}05)$*. Estimar* $P(X \leq 3)$*.*

$$E[X] = 100 \times 0{,}05 = 5$$

Luego aproximando usando las tablas de la distribución Poisson, se tiene

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= \sum_{x=0}^{3} P(X = x) \\ &\approx 0{,}0067 + 0{,}0337 + 0{,}0842 + 0{,}1404 \\ &= 0{,}265 \end{aligned}$$

La solución exacta usando la distribución binomial es $0{,}2578$*.*