7. MODELOS DISCRETAS

Objetivo

Introducir las distribuciones discretas más importantes: las distribuciones Bernoulli, binomial y geométrica, la distribución Poisson. Demostrar cómo usar tablas de probabilidades.

Bibliografía recomendada

Peña y Romo (1997), Capítulo 16.

Hasta ahora, hemos tratado todos los problemas de probabilidad por separado. No obstante en muchos casos, la fórmula para hallar las probabilidades tiene la misma forma.

El modelo de Bernoulli

Supongamos que hacemos un experimento simple de lanzar una moneda sesgada con $p = P(\text{cruz})$ una vez.

Definimos una variable X como

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si sale cruz} \\ 0 & \text{si sale cara} \end{cases}$$

es decir que $X =$ el número de cruces.

En este caso, se dice que X tiene una **distribución de Bernoulli con parámetro** p.

Una variable con sólo dos posibles resultados (cruz / cara, éxito / fracaso, ...) donde se da un valor de 1 en caso de cruz (éxito) y 0 en caso de cara (fracaso) tiene una distribución de Bernoulli. El experimento se llama un **ensayo de Bernoulli**.

Media y varianza de una variable Bernoulli

Sea X una variable Bernoulli con parámetro p. Luego:

$$
\begin{aligned}
E[X] &= p \times 1 + (1-p) \times 0 \\
&= p \\
E\left[X^2\right] &= p \times 1^2 + (1-p) \times 0^2 \\
&= p \\
V[X] &= E\left[X^2\right] - E[X]^2 \\
&= p - p^2 \\
&= p(1-p) \\
DT[X] &= \sqrt{p(1-p)}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 154 *Se sabe que una máquina produce un 3 % de piezas defectuosas. Elegimos una pieza al azar para comprobar si no presenta defectos. ¿C ómo se distribuye la variable X que vale 1 si la pieza no es defectuosa y 0 si es defectuosa?*

¿Cuáles son su media y su varianza?

X sigue una distribución Bernoulli con parámetro 0,97*. La media y varianza son*

$$\begin{aligned} E[X] &= ,97 \\ V[X] &= ,97 \times ,03 \\ &= ,0291 \end{aligned}$$

Ejemplo tomado de Peña y Romo (1997)

La distribución binomial

Supongamos ahora que se repiteun ensayo de Bernoulli n veces de forma independiente, por ejemplo que se tira la moneda con $p = P(\text{cruz})$ n veces, y que se quiere la distribución de $X =$ el número de cruces. Esta distribución se llama la distribución binomial con parámetros n y p.

Definición 38 *Una variable X tiene una* **distribución binomial con parámetros n y p** *si*

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

para $x = 0, 1, \ldots, n$ donde $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$. En este caso, se escribe $X \sim B(n, p)$.

Por tanto, la distribución Bernoulli es el caso especial $X \sim B(1, p)$.

Ejemplo 155 *La probabilidad de que Ronaldo marque un gol de penalti es* 0,8*. ?Cuál es la distribución del número de goles que marca en los siguientes 6 penaltis?*

$$X \sim B(6, 0{,}8)$$

?Cuál es la probabilidad de que marque todas las 6 penaltis?

$$P(X = 6) = \left(\begin{array}{c} 6 \\ 6 \end{array} \right) ,8^6 (1 - ,8)^{6-6} \approx ,262$$

¿Y la probabilidad de que falle por lo menos uno?

$$P(X < 6) = 1 - P(X = 6) = ,738$$

Ejemplo 156 *Volviendo al Ejemplo 154, supongamos que se eligen 10 piezas al azar. Si X es el número de piezas defectuosas, ¿cuál es la distribución de X?*

$$X \sim B(10, 0{,}03)$$

Igualmente, si Y es el número de piezas buenas,

$$Y \sim B(10, 0{,}97)$$

¿Cuál es la probabilidad de que se encuentre por lo menos una pieza defectuosa?

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \binom{10}{0} {,}03^0 (1 - {,}03)^{10-0} \\ &\approx {,}263 \end{aligned}$$

La media y desviación típica de una variable binomial

Teorema 13 *Sea* $X \sim B(n,p)$. *Luego*

$$\begin{aligned} E[X] &= np \\ V[X] &= np(1-p) \\ DT[X] &= \sqrt{np(1-p)} \end{aligned}$$

Demostración

Escribimos $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ *donde cada* X_i *es un ensayo de Bernoulli. Luego,*

$$\begin{aligned} E[X] &= E[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] \\ &= E[X_1] + \ldots + E[X_n] \\ &= p + \ldots + p = np \\ V[X] &= V[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] \\ &= V[X_1] + \ldots + V[X_n] \\ &= np(1-p) \end{aligned}$$

$\diamond$

Ejemplo 157 *Volvemos a Ronaldo.*

El número medio de goles en 6 penaltis es

$$E[X] = 6 \times 0{,}8 = 4{,}8$$

La desviación típica es

$$DT[X] = \sqrt{6 \times 0{,}8 \times 0{,}2} \approx 0{,}98$$

Ejemplo 158 *El número medio de piezas defectuosas en una muestra de 10 es*

$$10 \times 0{,}03 = 0{,}3$$

La desviación típica es

$$\sqrt{10 \times 0{,}03 \times 0{,}97} \approx ,54$$

El uso de tablas de la distribución binomial

A menudo es lioso calcular directamente a través de la fórmula para probabilidades binomiales. Más fácil es usar tablas de la distribución binomial.

En Peña y Romo (1997), se proporcionan tablas de las probabilidades de k *éxitos en una distribución binomial con* n *ensayos y probabilidad* p *de éxito*.

Es decir $P(X = k)$ donde $X \sim B(n, p)$.

Ejemplo 159 *Sea* $X \sim B(15, 0{,}2)$

Hallamos $P(X = 3)$ *y* $P(X \leq 3)$.

$P(X = 3) = 0{,}2501$

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= \sum_{x=0}^{3} P(X = x) \\ &= ,0352 + ,1319 + ,2309 + ,2501 \\ &= ,6481 \end{aligned}$$

Las tablas sólo consideran el caso $p \leq 0{,}5$. ?Qué hacemos si $p > 0{,}5$?

Ejemplo 160 *Sea* $X \sim B(20, 0{,}7)$ *Hallamos* $P(X = 11)$*.*

$P(X = 11) = P($*11 éxitos y 9 fracasos*$)$ *donde* $P($*éxito*$) = 0{,}7$*.*

Igualmente $P(X = 11) = P(Y = 9)$ *donde* Y *es el número de fracasos y* $P($*fracaso*$) = 0{,}3$*. Luego* $Y \sim B(20, 0{,}3)$ *y* $P(Y = 9) = 0{,}0654$*.*