8. MODELOS CONTINUOS

Objetivo

Introducir las distribuciones distribuciones continuas más importantes: las distribuciones uniforme, exponencial y normal. Ilustrar el uso de tablas de probabilidades de la distribución normal. Comentar el teorema central del límite y el uso de la distribución normal como aproximación.

Bibliografía recomendada

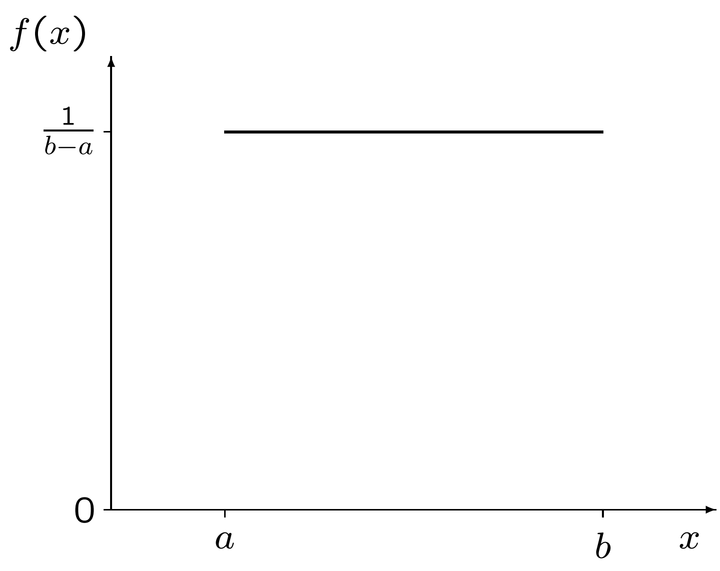
Peña y Romo (1997), Capítulos 17 y 18.

La distribución uniforme

Supongamos que una variable X puede tomar valores al azar en un rango (a, b). En este caso, se dice que X tiene una distribución uniforme entre a y b y se escribe

$$X \sim U(a, b).$$

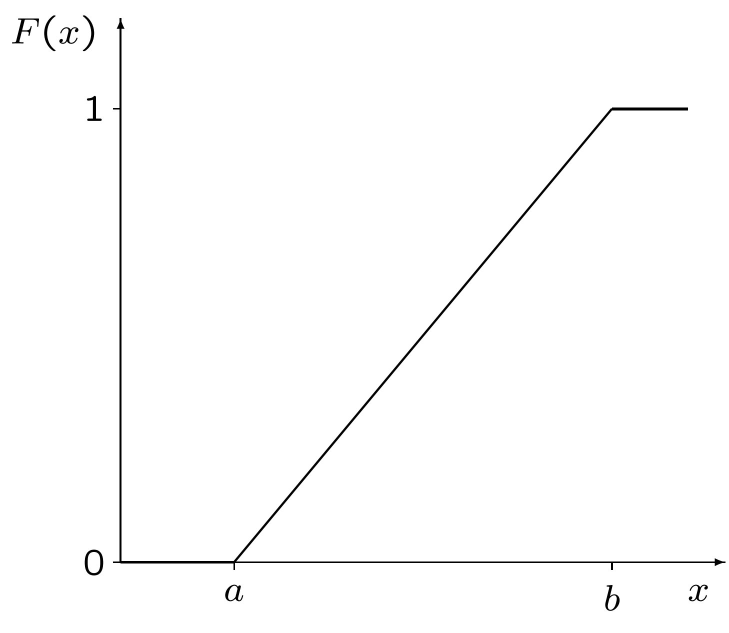
En este caso, la probabilidad de que X caiga en cualquier zona es la misma, y entonces la función de densidad es constante.



La función de distribución

Si $X \sim U(a,b)$, luego, si $a < x \leq b$,

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= \int_a^x \frac{1}{b-a}\, du \\ &= \left[\frac{u}{b-a}\right]_a^x \\ &= \frac{x-a}{b-a} \end{aligned}$$



La media y desviación típica

Teorema 17 *Sea $X \sim U(a,b)$. Luego,*

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{a+b}{2} \\ V[X] &= \frac{(b-a)^2}{12} \\ DT[X] &= \frac{b-a}{\sqrt{12}} \end{aligned}$$

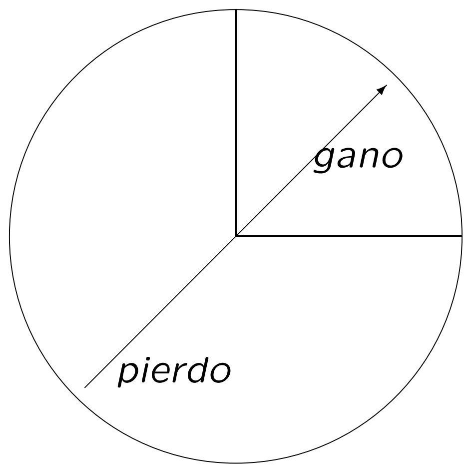
Demostración

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_a^b \frac{1}{b-a} \times x \, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b \\ &= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} \\ &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E\left[X^2\right] &= \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3(b-a)}\right]_a^b \\
&= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} \\
&= \frac{b^2+ab+a^2}{3} \\
V[X] &= E\left[X^2\right]-E[X]^2 \\
&= \frac{b^2+ab+a^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\
&= \frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \\
&= \frac{a^2-2ab+b^2}{12} \\
&= \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned}
$$

$\diamond$

Ejemplo 169 *Juego con una rueda de fortuna como en la ilustración.*



?Cuál es la probabilidad de que gane?

Sea X el angulo a la vertical de la flecha. Luego $X \sim U(0, 360^o)$. La probabilidad de que gane es

$$P(X \leq 90) = \frac{90 - 0}{360 - 0} = \frac{1}{4}$$

La distribución exponencial

Anteriormente estudiamos la distribución Poisson $X \sim P(\lambda)$ como modelo para el número de *sucesos raro*s, X, en una unidad del tiempo. Ahora, supongamos que queremos estudiar la distribución del tiempo Y entre un suceso y el siguiente.

En este caso, la distribución de Y es una distribución exponencial con parámetro λ.

Definición 41 *Y tiene una* **distribución exponencial con parámetro** λ *si*

$$f(y) = \lambda e^{-\lambda y}$$

para $0 < y \leq \infty$. En este caso se escribe $Y \sim Ex(\lambda)$.

La función de distribución de Y es

$$\begin{aligned} F(y) &= P(Y \leq y) \\ &= \int_0^y \lambda e^{-\lambda u}\, du \\ &= \left[-e^{-\lambda u}\right]_0^y \\ &= 1 - e^{-\lambda y} \end{aligned}$$

para $0 < y < \infty$.

La media y varianza

Teorema 18 *Si* $Y \sim Ex(\lambda)$, *entonces*

$$\begin{aligned} E[Y] &= \frac{1}{\lambda} \\ V[Y] &= \frac{1}{\lambda^2} \\ DT[Y] &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Demostración parcial

Recordamos que λ es el número de sucesos esperados en una unidad de tiempo. Entonces, el tiempo esperado entre sucesos debe ser $1/\lambda$, es decir que $E[Y] = 1/\lambda$. $\diamond$

Ejemplo 170 *Volvemos al Ejemplo 165. Sabemos que el número de fuegos por año tiene una distribución Poisson* $P(50)$.

?Cuál es el tiempo medio entre fuegos?

Hallar la probabilidad de que después del último fuego, tarda más de 2 semanas hasta el siguiente.

El tiempo medio entre fuegos es $1/50$ *de un año, es decir* $364/50 = 7{,}28$ *días.*

$$
\begin{aligned}
P(T > 14) &= \int_{14}^{\infty} \frac{50}{364} e^{-\frac{50}{364}t}\, dt \\
&= e^{-\frac{50}{364}\times 14} \\
&\approx 0{,}146
\end{aligned}
$$

Ejemplo 171 *El tiempo T entre llegadas sucesivas de coches a un punto en la carretera se distribuye como una exponencial con parámetro* $\lambda = 0{,}01$ *segundos.*

1) Hallar la media y varianza de T.

2) Un viejecillo empieza a cruzar la calle inmediatamente depués de que un coche pasa por allí. Si tarda 50 segundos en cruzar la calle, ?cuál es la probabilidad de que le atropella la siguiente coche que pasa (suponiendo que no para, igual que la mayoría de conductores españoles)?

3) ?Cuál es la probabilidad de que en un minuto no llegue ningún coche?

1) $E[T] = 1/0{,}01 = 100$ *y* $V[T] = 1/0{,}01^2 = 10000$.

2)

$$\begin{aligned} P(T < 50) &= \int_0^{\infty} 0{,}01 e^{-0{,}01t}\,dt \\ &= 1 - e^{-0{,}01\times 50} \\ &= 1 - e^{-0{,}5} \\ &\approx 0{,}393 \end{aligned}$$

3) Sea X *el número de coches que lluegan en un minuto. La distribución de* X *es Poisson:*

$$X \sim P(60 \times 0{,}01) = P(0{,}6).$$

Entonces $P(X = 0) = \frac{0{,}6^0 e^{-0{,}6}}{0!} \approx 0{,}549$.

Ejemplo 172 *El tiempo de funcionamiento de una bombilla se distribuye como exponencial con una media de* 10 *días.*

a) ?Cuál es la probabilidad de que una bombilla funciona más de 10 días?

b) Suponiendo que cada vez que falla una bombilla se la cambia por una nueva, hallar la probabilidad de que haya más de 1 fallo en un mes (30 días).

c) Hallar el número medio de fallos en un mes.

a) Sea $T \sim Ex(\lambda)$ el tiempo de funcionamiento. Hallamos el valor de λ. Sabemos que $E[T] = 10 = \frac{1}{\lambda}$ y luego $\lambda = 0{,}1$. Ahora:

$$
\begin{aligned}
P(T > 10) &= 1 - P(T \leq 10) \\
&= 1 - \left\{1 - e^{-0{,}1 \times 10}\right\} \\
&= e^{-1} \approx 0{,}368
\end{aligned}
$$

b) El número de fallos X en 30 días tiene una distribución Poisson

$$X \sim P(30 \times 0{,}1) = P(3).$$

$$
\begin{aligned}
P(X > 1) &= 1 - P(X \leq 1) \\
&= 1 - \left\{\frac{3^0 e^{-3}}{0!} + \frac{3^1 e^{-3}}{1!}\right\} \\
&\approx 0{,}801
\end{aligned}
$$

c) El número medio de fallos por mes son 3.