# Métodos Bayesianos

## Ejercicios sobre contrastes de hipótesis y selección de modelos

1) Sean $P(H_0) = P(H_1) = ½$. Suponiendo que después de observar una muestra de datos, el factor Bayes a favor de $H_1$ es $B_0^1 = 4$, hallar la probabilidad a posteriori de $H_1$.

2) Supongamos que se ha hecho un experimento para comparar dos hipótesis $H_0$ y $H_1$ y, después de observar los datos, se tiene $P(H_1|\text{datos}) = 0.4$ y un factor Bayes a favor de $H_1$, $B_0^1 = 2$. Calcular la probabilidad a priori, $P(H_1)$.

3) Supongamos que se quiere contrastar $H_0$: $\mu = \mu_0$ frente a $H_1$: $\mu \neq \mu_0$. Demostar que el factor Bayes a favor de $H_0$ satisface:

$$B_1^0 \geq \frac{f(datos|\mu_0)}{f(datos|\hat{\mu})}$$

donde $\hat{\mu}$ es el EMV de $\mu$, independiente de la distribución a priori de $\mu$ bajo $H_1$.

4) Supongamos que se quiere contrastar $H_0$: $\mu = \mu_0$ frente a $H_1$: $\mu \neq \mu_0$, donde $\mu$ es la media de una población normal (con varianza conocida) $Y \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$. Sea $\mu|H_1 \sim \text{Normal}(\mu_0,\sigma^2/c)$. Supongamos que se observa una muestra $y_1, \ldots, y_n$.

   a. Demostrar que el factor Bayes a favor de $H_0$ es

$$B_1^0 = \left(\frac{c+n}{c}\right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{c+n}\right)z^2}$$

   donde $z = \frac{\bar{y}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$.

   b. Cuando c = 0, ¿qué pasa con el factor Bayes cuando n → ∞?