CAPÍTULO 1: ALGUNAS REGLAS DE PROBABILIDAD

Para leer

Lee: Capítulo 1

Definición 1 *(Probabilidad Condicional)*

Para dos sucesos A y B,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Observación 1 *Se puede aplicar la definición también a variables discretas o continuas.*

Observación 2 *Para mí, casi todas las probabilidades son condicionales. Siempre existe la historia H.*

La ley de la probabilidad total

Teorema 1 *(Ley de la probabilidad total)*

Para un suceso A y una partición $B_1, \ldots, B_k$,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i)$$

Ejemplo 1 *En una fábrica se embalan (en cajas) galletas en 4 cadenas de montaje; A_1, A_2, A_3 y A_4. El 35 % de la producción total se embala en la cadena A_1 y el 20 %, 24 % y 21 % en A_2, A_3 y A_4 respectivamente. Los datos indican que no se embalan correctamente un porcentaje pequeño de las cajas; el 1 % de A_1, el 3 % de A_2, el 2.5 % de A_3 y el 2 % de A_4. ¿Cuál es la probabilidad de que una caja elegida al azar de la producción total sea defectuosa?*

Definir $D =$ *defectuosa. Luego*

$$
\begin{aligned}
P(D) &= \sum_{i=1}^{4} P(D|A_i)P(A_i) \\
&= ,01 \times ,35 + ,03 \times ,20 + ,025 \times ,24 + \\
&\quad +,02 \times ,21 \\
&= ,0197
\end{aligned}
$$

Observación 3 *Se puede aplicar el teorema a variables discretas*

$$f(x) = \sum_{y} f(x|Y = y)P(Y = y)$$

y a variables continuas

$$f(x) = \int f(x|y)f(y)\, dy.$$

Ejemplo 2 ¡IMPORTANTE!

Suponer que $Y \sim \mathcal{E}(\beta)$, una distribución exponencial

$$f(y) = \beta \exp(-\beta y)$$

y que $X|Y \sim \mathcal{P}(Y)$, una distribución Poisson,

$$P(x|y) = \frac{y^x}{x!}e^{-y}$$

Entonces, la distribución marginal de X es

$$\begin{aligned}
P(x) &= \int P(x|y)f(y)\,dy \\
&= \int_0^\infty \frac{y^x}{x!}e^{-y}\beta \exp(-\beta y)\,dy \\
&= \frac{\beta}{x!}\int_0^\infty y^x \exp(-(\beta+1)y)\,dy \\
&= \frac{\beta}{x!}\int_0^\infty y^{(x+1)-1} \exp(-(\beta+1)y)\,dy
\end{aligned}$$

¿Cómo se resuelve la integral?

El integrando es el núcleo de una distribución gamma; $\mathcal{G}(x+1, \beta+1)$. Luego

$$
\begin{aligned}
P(x) &= \frac{\beta}{x!} \frac{\Gamma(x+1)}{(\beta+1)^{(x+1)}} \\
&= \frac{\beta}{x!} \frac{x!}{(\beta+1)^{(x+1)}} \\
&= \frac{\beta}{(\beta+1)^{(x+1)}}
\end{aligned}
$$

¿Reconocemos esta distribución?

Se sustituye $p = \beta/(1+\beta)$. Luego $0 < p < 1$ y

$$
\begin{aligned}
P(x) &= \frac{p}{1-p}(1-p)^{(x+1)} \\
&= p(1-p)^x \quad \textit{para } x = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

que es una distribución geométrica con parámetro p.

Ejemplo 3 *Si* $X|\theta \sim \mathcal{E}(\theta)$ *y* $\theta \sim \mathcal{G}(\alpha, \beta)$*, luego*

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty \theta e^{-\theta x} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}\, d\theta \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \theta^\alpha e^{-(\beta+x)\theta}\, d\theta \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \theta^{(\alpha+1)-1} e^{-(\beta+x)\theta}\, d\theta \end{aligned}$$

y el integrando es el núcleo de otra distribución gamma, $\mathcal{G}(\alpha+1, \beta+x)$*. Entonces*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\beta+x)^{\alpha+1}} \\ &= \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+x)^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

donde se ha utilizado una propiedad de la función gamma.

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

Observación 4 *No es una distribución estándar, pero si se define $Z = X + \beta$, se puede ver que Z tiene una distribución Pareto.*

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= f_X(z-\beta) \\ &= \alpha\beta^{\alpha} z^{-\alpha-1} \quad \textit{para } Z > \beta \\ Z &\sim \mathcal{PA}(\beta, \alpha) \end{aligned}$$

El teorema de Bayes

Teorema 2 *(Teorema de Bayes)*

Para dos sucesos A y B,

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Ejemplo 4 *Volviendo al Ejemplo 1, supongamos que descubrimos que una caja es defectuosa. Queremos calcular la probabilidad de que la caja venga de A_1.*

$$\begin{aligned} P(A_1|D) &= \frac{P(D|A_1)P(A_1)}{P(D)} \\ &= \frac{,01 \times ,35}{,0197} \\ &\approx ,1777 \end{aligned}$$

Ejemplo 5 *3 prisioneros, Andrés, Bartolo y Carlos han solicitado para la libertad condicional. Se sabe que el gobernador va a poner en libertad uno de los tres pero el no puede decir quien hasta el final del mes. El gobernador dice a Andrés que puede informarle del nombre de un solicitante sin exíto dadas las condiciones.*

1. *Si se pone en libertad Andrés, el gobernador dirá Bartolo o Carlos con la misma probabilidad* ($1/2$).

2. *Si se pone en libertad Bartolo, dirá Carlos.*

3. *Si se pone en libertad Carlos, dirá Bartolo.*

El gobernador cree que este información sea inútil a Andrés y le dice que Bartolo no estará librado.

Andrés piensa "mi probabilidad de que me pongan en libertad ha cambiado de $1/3$ *a* $1/2$*. Estoy muy contento."*

¿Tiene razón?

Se definen A, B,C *los sucesos de que Andrés, Bartolo y Carlos estén puestos en libertad respectivamente. Se define* b *el suceso de que el gobernador diga Bartolo.*

Se tiene:

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$$

porque solo uno de los tres va a ganar la libertad.

$$P(b|A) = 1/2, \quad P(b|B) = 0, \quad P(b|C) = 1$$

dada la información del gobernador.

Entonces, usando el teorema de Bayes,

$$
\begin{aligned}
P(A|b) &= \frac{P(b|A)P(A)}{P(b)} \\
&= \frac{P(b|A)P(A)}{P(b|A)P(A) + P(b|B)P(B) + P(b|C)P(C)} \\
&= \frac{1/2 \times 1/3}{1/2 \times 1/3 + 0 \times 1/3 + 1 \times 1/3} \\
&= 1/3
\end{aligned}
$$

¡No tiene razón!

Observación 5 *Se puede aplicar el teorema a variables discretas y continuas. En el caso de X continua se tiene*

$$\begin{aligned} f(x|y) &= \frac{f(y|x)f(x)}{f(y)} \\ &= \frac{f(y|x)f(x)}{\int f(y|x)f(x)\,dx} \end{aligned}$$

Ejemplo 6 *Retomando el Ejemplo 2, calculamos la distribución de $Y|x$.*

$$\begin{aligned} f(y|x) &= \frac{P(x|y)f(y)}{P(x)} \\ &= \frac{\frac{y^x e^{-y}}{x!}\beta e^{-\beta y}}{\frac{\beta}{(\beta+1)^{(x+1)}}} \\ &= \frac{(\beta+1)^{(x+1)}}{x!} y^x e^{-(\beta+1)y} \\ &= \frac{(\beta+1)^{(x+1)}}{\Gamma(x+1)} y^{(x+1)-1} e^{-(\beta+1)y} \end{aligned}$$

que es la densidad de una variable gamma; $\mathcal{G}(x+1, \beta+1)$.

Observación 6 *Recordamos el teorema de Bayes:* $f(x|y) = f(y|x)f(x)/f(y)$. *La demonidador* $f(y)$ *es independiente de* x. *Entonces se puede escribir el teorema de forma*

$$f(x|y) \propto f(y|x)f(x).$$

Este resultado es útil para los cálculos porque implica que se pueden olvidar las constantes multiplicativas hasta el final.

Ejemplo 7 *Volviendo al Ejemplo 3, calculamos la distribución de* θ *dada una observación* x.

$$\begin{aligned} f(\theta|x) &\propto f(x|\theta)f(\theta) \\ &\propto \theta e^{-\theta x}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta} \\ &\propto \theta^{\alpha+1-1}e^{-(\beta+x)\theta} \end{aligned}$$

que es el núcleo de una distribución gamma $\mathcal{G}(\alpha+1,\beta+x)$ *y entonces,* $\theta|x \sim \mathcal{G}(\alpha+1,\beta+x)$.

La media y varianza condicional.

Definición 2 *Para dos variables X e Y, definimos la media y varianza de X dado $Y = y$ como*

$$\begin{aligned} E[X|Y = y] &= \int x f(x|y)\, dx \\ V[X|Y = y] &= \int (x - E[X|Y = y])^2 f(x|y)\, dx \end{aligned}$$

El siguiente teorema nos proporciona la relación entre la esperanza y varianza marginal y la esperanza y varianza condicional.

Teorema 3 ¡IMPORTANTE!
Para dos variables X e Y, se tiene

- $E[X] = E[E[X|Y]]$
- $V[X] = E[V[X|Y]] + V[E[X|Y]]$

Ejemplo 8 *Volviendo al Ejemplo 2, supongamos que queremos calcular la media y varianza de X (y que no sabemos nada de la distribución geométrica).*

$$
\begin{aligned}
E[X] &= E[E[X|Y]] \\
&= E[Y] \quad \textit{porque } X|Y \sim \mathcal{P}(Y) \\
&= \frac{1}{\beta} \quad \textit{la media de la exponencial} \\
V[X] &= E[V[X|Y]] + V[E[X|Y]] \\
&= E[Y] + V[Y] \\
&\ \textit{porque media} = \textit{varianza} = Y \\
&= \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} \\
&= \frac{\beta + 1}{\beta^2}
\end{aligned}
$$

Observación 7 *Sustituyendo* $p = \beta/(1+\beta)$*, se tienen los resultados usuales;*

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{1-p}{p} \\ V[X] &= \frac{1-p}{p} + \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 \\ &= \frac{1-p}{p^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 9 *Retomando el Ejemplo 3, tenemos*

$$\begin{aligned} E[X] &= E[E[X|\theta]] \\ &= E[1/\theta] \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\theta}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}\, d\theta \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \theta^{(\alpha-1)-1}e^{-\beta\theta}\, d\theta \end{aligned}$$

El integrando es el núcleo de una distribución gamma; $\mathcal{G}(\alpha-1,\beta)$*. Entonces:*

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha-1)}{\beta^{\alpha-1}} \\
&= \frac{\beta}{\alpha-1}
\end{aligned}
$$

Observación 8 *La esperanza solo existe si* $\alpha > 1$.

Observación 9 *Hemos visto anteriormente que* $Z = X + \beta \sim \mathcal{PA}(\beta, \alpha)$. *Luego podemos calcular la media de* X *utilizando la formula para la media de una distribución Pareto.*

$$
\begin{aligned}
E[X] &= E[Z] - \beta \\
&= \frac{\alpha\beta}{\alpha-1} - \beta \quad \textit{para } \alpha > 1 \\
&= \frac{\beta}{\alpha-1}
\end{aligned}
$$