Ignacio Cascos Fernández
Departamento de Estadística
Universidad Carlos III de Madrid

Hoja 3, curso 2006–2007.

Ejercicio 1. Se conocen la función de distribución de la variable aleatoria X 'número de llamadas que recibe cierta persona al móvil en un día' y la función de densidad de la variable aleatoria Y 'duración de la batería de un móvil medida en días'

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1/2 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 3/4 & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ 7/8 & \text{si} \quad 2 \le x < 3 \\ 1 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases} \quad ; \quad f_Y(x) = \begin{cases} x-5 & \text{si} \quad 5 < x < 6 \\ 7-x & \text{si} \quad 6 \le x < 7 \\ 0 & \text{si} \quad x \notin (5,7) \end{cases} .$$

Se pide:

a)
1. el número medio de llamadas que recibe esa persona en un día;
2. la probabilidad de que en un día reciba alguna llamada, pero menos de 3;
3. la probabilidad de que en un día reciba más de 3 llamadas;

b)
1. la duración media de la batería del móvil;
2. la probabilidad de que una batería dure más de 6 días y medio;
3. el mayor tiempo t tal que la probabilidad de que el móvil dure más de t días es 0'9.

Ejercicio 2. Se conocen la función de probabilidad de la variable aleatoria X 'número de llamadas que recibe cierta persona al móvil en un día' y la función de densidad de la variable aleatoria Y 'duración de la batería de un móvil medida en días'

$$P(X=k) = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad k = 0 \\ 1/4 & \text{si} \quad k = 1 \\ 1/4 & \text{si} \quad k = 2 \end{cases} \quad ; \quad f_Y(x) = \begin{cases} x-6 & \text{si} \quad 6 < x < 7 \\ 8-x & \text{si} \quad 7 \le x < 8 \\ 0 & \text{si} \quad x \notin (6,8) \end{cases} .$$

Se pide:

a)
1. el número medio de llamadas que recibe esa persona en un día;
2. la función de distribución de X (con gráfica);
3. la probabilidad de que en un día fijo reciba alguna llamada;

b)
1. la duración media de la batería del móvil;
2. la función de distribución de Y (con gráfica);
3. la probabilidad de que una batería dure más de 6 días y medio.

Ejercicio 3. Una carrera de coches consta de 25 vueltas a un circuito. Cada ingeniero del equipo que diseña el motor de un coche tiene una prima que depende del numero de vueltas que aguante dicho motor. Por cada vuelta que complete el coche a partir de la 21 y hasta la 24 (ambas inclusive) dicha prima asciende a 100 euros, así si el motor dura 21'5 vueltas, la prima es de 100 euros y si dura 23 vueltas la prima es de 300 euros. Si el coche termina la carrera la prima es de 1000 euros. Si se sabe que el motor resistirá al menos 15 vueltas y no más de 30 y para $x \in (15, 30)$, la probabilidad de que resista más de x vueltas es $(30 - x)/15$, ¿cuál será la media de la prima que se llevará un ingeniero?

Ejercicio 4. Un constructor debe pedir algunos materiales que tienen un tiempo de entrega que puede modelarse mediante una variable aleatoria continua uniformemente distribuida entre 1 y 4 días (es decir tardarán al menos 1 día en llegar y con seguridad no más de 4). Los dos primeros días no necesita los materiales, de tal modo que si el tiempo de espera es $X < 2$, el coste que supondría la demora es 0. Si llegan a lo largo del tercer o cuarto día, $2 \leq X < 4$, entonces habría un coste de demora fijo cifrado 1000 euros más 200 euros por día o fracción (que exceda de 2). Así si llegan tras 2'5 días el coste sería 1000+200×0'5 euros y si llegan tras 3'5 días, 1000+200×1'5 euros. Calcular el valor esperado del coste de la espera de los materiales.

Ejercicio 5. Una máquina se estropea con frecuencia y el coste semanal que suponen sus reparaciones puede modelarse mediante una variable aleatoria X con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 3(1-x)^2 & \text{si} \quad x \in (0,1) \\ 0 & \text{si} \quad x \notin (0,1) \end{cases} .$$

Donde X viene dada en cientos de euros. ¿Cuál debe ser el presupuesto semanal para reparaciones de la máquina si se desea que el coste real, es decir X, sólo rebase el presupuesto el 10 % de las veces?

Ejercicio 6. Dada X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in (0,1) \\ 0 & \text{si} \quad x \notin (0,1) \end{cases},$$

calcula la función de densidad de $Y = 1/X$.

Ejercicio 7. Dada X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases},$$

calcula la función de densidad de $Y = \sqrt{X}$.

Ejercicio 8. La variable X modela la vida útil de un componente electrónico medida en horas y tiene función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} (1/100)e^{-x/100} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}.$$

Tres de estos componentes trabajan de forma independiente en un equipo. El equipo deja de funcionar si fallan los tres componentes. Calcular la probabilidad de que el equipo trabaje durante por lo menos 200 horas.

Ejercicio 9. Cierta empresa fabrica resistencias con una resistividad nominal de 10Ω. La resistencia media que ofrecen estos componentes es de 10Ω y la varianza de dicha resistencia 50/3. Si no se sabe la distribución de la resistencia ofrecida por dichos componentes, construye el menor intervalo posible que contenga la resistividad de una resistencia específica con probabilidad 0'8.

Si la resistencia de cada uno de los componentes tiene función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 0'01x & \text{si} \quad 0 < x < 10 \\ 0'2 - 0'01x & \text{si} \quad 10 \leq x < 20 \\ 0 & \text{si} \quad x \notin (0,20) \end{cases},$$

construye el menor intervalo que contenga la resistencia de un componente específico con probabilidad exactamente 0'8.

Ejercicio 10. La variable aleatoria X describe el 'tiempo de vida de cierta especie de insectos' y está medida en días. Se sabe que tiene la siguiente función de densidad,

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 2-x & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases} .$$

Construye el menor intervalo que contenga el tiempo de vida de un ejemplar de esa especie de insectos con probabilidad 0'95.

Ejercicio 11. Un empresario se plantea realizar cierta inversión y realiza un estudio de mercado. El estudio concluye que los ingresos que obtendría merced a esa inversión tiene media 10000 euros y desviación típica 200 euros. Si no se sabe la distribución que siguen esos ingresos, construye el menor intervalo posible que contenga esos ingresos con probabilidad 0'95.

Si los ingresos tuvieran función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{400\sqrt{3}} & \text{si} \quad x \in \left(10000 - 200\sqrt{3}, 10000 + 200\sqrt{3}\right) \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \left(10000 - 200\sqrt{3}, 10000 + 200\sqrt{3}\right) \end{cases} ,$$

construye el intervalo centrado en la media que contenga a los ingresos con probabilidad exactamente 0'95.

Ejercicio 12 (Junio 2006, técnicos). El flujo de demanda de teléfonos móviles (en miles a la hora) de una determinada fábrica, se ajusta a una variable aleatoria con la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} k - x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} ,$$

Se pide:

a) Hallar k, para que $f(x)$ sea efectivamente una función de densidad.

b) Hallar la función de distribución $F(x)$.

c) Hallar la esperanza y la varianza de X.

d) Si la fábrica sólo puede producir 750 móviles como máximo en una hora, calcular la probabilidad de que haya un exceso de demanda.

Ejercicio 13 (Septiembre 2005, técnicos). La duración en años de los individuos de una población humana se asimila a una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{60} e^{-x/60} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases} .$$

a) Calcular la función de distribución de la variable y la vida media de la población.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que llegue a los 65 un individuo que ya tiene 50?

Ejercicio 14. Un juego consiste en lanzar simultáneamente dos dados de seis caras. Si en los dos dados obtenemos un 6, un 5 ó un 4, ganamos, en euros, la suma del valor de los dados, mientras que si sale un 1, un 2 ó un 3, ganamos lo que aparece en uno de los dados (si los dados tienen una puntuación distinta no ganamos nada). El precio por jugar una vez a este juego es 1 euro.

a) ¿Cuánto dinero ganaré, en promedio, cada vez que juegue a este juego (del dinero que se recibe tras lanzar los dados hay que descontar lo que se paga por jugar)?

b) Construye la función de distribución de la variable aleatoria ganancias.

c) Otro juego consiste en lanzar un dado. Si sale un 6 se ganan 6 euros y si sale otro número no se gana ningún dinero. Si cada partida a este segundo juego cuesta también 1 euro, ¿jugando a cuál de estos dos juegos gano una cantidad estrictamente positiva de dinero con mayor probabilidad?

Ejercicio 15. La función de densidad del diámetro de las perlas cultivadas producidas por cierta empresa es

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{si } x \in (3, 6) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} ,$$

donde el diámetro X está medido en milímetros. Las perlas son más apreciadas cuanto mayores sean y su precio depende de su volumen. En concreto, el precio de las perlas del anterior fabricante es aX^3 euros, donde $a > 0$ varía de mes en mes.

a) ¿Cuáles son las funciones de distribución y de densidad del precio de las perlas del anterior fabricante? (en función de a)

b) ¿Con qué probabilidad obtendremos una perla cuyo precio sea superior a $a \times 91$'125 euros?

c) ¿Cuál es el precio medio de una perla?

Ejercicio 16 (Junio 2005, superiores). La función de densidad de la proporción de alumnos que aprueban Estadística I viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} .$$

Hallar α para que sea una funcion de densidad

a) Calcular la probabilidad de que aprueben más del 20 % de los alumnos.

b) Si Y es el porcentaje de alumnos que aprueban Estadística II y se tiene que $Y = \sqrt{X}$, calcular la función de densidad de Y.

Ejercicio 17 (Junio 2004, superiores). Los autobuses de una compaía pasan regularmente por una cierta parada de una línea urbana de lunes a viernes, pasando con retraso tres días por semana. Cuando un usuario llega a la parada, el tiempo que debe esperar el autobús, si este no tiene retraso, es una variable aleatoria con función de densidad $f_1(t)$ (t en minutos). Sin embargo, cuando la línea lleva retraso, el tiempo de espera se distribuye según la función de densidad $f_2(t)$:

$$f_1(t) = 1/10,\ 0 < t < 10 \qquad \text{y} \qquad f_2(t) = (1/7)e^{-(1/7)t},\ t > 0.$$

a) Calcular la probabilidad de que el usuario tenga que esperar menos de 5 minutos;

b) Sabiendo que el usuario ya lleva esperando 5 minutos, obtener la probabilidad de que el autobús venga con retraso.