Ignacio Cascos Fernández
Departamento de Estadística
Universidad Carlos III de Madrid

Variables aleatorias

Estadística I — curso 2008–2009

Una *variable aleatoria* es un valor numérico que se corresponde con una cierta característica cuantitativa de un experimento aleatorio. A continuación la definimos formalmente.

Definición 1. Dado un experimento aleatorio con espacio muestral E (y probabilidad asociada P), una **variable aleatoria** X es una aplicación del espacio muestral E en $\mathbb{R}$ que satisface cierta propiedad matemática denominada *medibilidad*.

Esto es, una variable aleatoria es una aplicación

$$X : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que para cualquier conjunto de números reales B, se cumple que su antiimagen por X, que obtenemos como $X^{-1}(B) = \{e \in E : X(e) \in B\}$, es un suceso asociado al experimento aleatorio.

Asociada a una variable aleatoria X, podemos definir una probabilidad en la que el espacio muestral es $\mathbb{R}$ y los sucesos son subconjuntos de $\mathbb{R}$. Es decir, la aplicación P_X que asigna a cada conjunto de números reales B el valor $P_X(B) = P\big(X^{-1}(B)\big)$ es una probabilidad. Habitualmente escribiremos $P(X \in B)$ en lugar de $P_X(B)$ y hablaremos de la probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor en B.

Variables aleatorias discretas, función de probabilidad. Una **variable aleatoria discreta** toma un conjunto finito o numerable de valores. Si X es discreta y toma valores en $\{x_1, x_2, \ldots\}$, la probabilidad que induce queda completamente determinada por su *función de probabilidad*. La **función de probabilidad** es una aplicación $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $p(x) \geq 0$ y verifica $p(x) = P(X = x)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Así, para los valores x_i que puede tomar X, se tiene $p(x_i) = P(X = x_i) > 0$, mientras que si $x \notin \{x_1, x_2, \ldots\}$, entonces $p(x) = 0$. Para cualquier conjunto de números reales B, se cumple

$$P(X \in B) = \sum_{x_i \in B} p(x_i).$$

Variables aleatorias continuas, función de densidad. Entre los valores que puede tomar una **variable aleatoria continua** está contenido un intervalo de números reales. La probabilidad que induce una variable aleatoria continua queda completamente determinada por su *función de densidad.* La **función de densidad** es una aplicación $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0$ y además $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Si f es la función de densidad asociada a una variable aleatoria X, entonces para cualquier conjunto de números reales B, se cumple

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx,$$

en concreto, dados $a, b \in \mathbb{R}$, tenemos que $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$.

Sobre las variables aleatorias continuas es importante destacar que dado cualquier número real cualquiera fijo, la probabilidad de que una variable aleatoria continua tome exactamente ese valor es siempre cero.

Función de distribución de una variable aleatoria. Una **función de distribución** sobre $\mathbb{R}$ es una función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

- F es creciente;
- F es continua por la derecha, es decir para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$, se cumple $\lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$;
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$;
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

La **función de distribución de una variable aleatoria** X se define para cualquier $x \in \mathbb{R}$ como $F(x) = P(X \leq x)$. Se puede probar que cumple las cuatro condiciones anteriores y además determina completamente la distribución de X, es decir la probabilidad inducida por X a la que habíamos denotado P_X.

Si X es discreta, toma los valores $\{x_1, x_2, \ldots\}$ y tiene función de probabilidad p, entonces

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)\,.$$

La función de distribución de una variable aleatoria discreta es *escalonada* (constante a trozos).

Si X es continua y tiene función de densidad f, entonces

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,.$$

La función de distribución de una variable aleatoria continua es continua y su derivada es la función de densidad, es decir, $F'(x) = f(x)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, podemos calcular la probabilidad de que X esté en cualquier intervalo de extremos a y b utilizando su función de distribución según las siguientes relaciones.

$$\begin{aligned}
&P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a);\\
&P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a) = F(b) - \lim_{x\to a^-} F(x);\\
&P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a) = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a);\\
&P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a) = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^-} F(x).
\end{aligned}$$

Esperanza matemática o media. La **esperanza matemática o media** de una variable aleatoria X representa el valor promedio de los valores que toma la variable.

Si X es discreta, entonces su esperanza se define como

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i p(x_i).$$

Si X es continua, entonces su esperanza se define como

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx.$$

Se denota como μ ó μ_X para hacer referencia a la variable aleatoria.

Propiedades de la media. Dadas X, Y variables aleatorias y $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple

- $\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$;
- $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$.

Dada una función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y una variable aleatoria X, la esperanza de la transformación de X por g, se define como $\mathbb{E}[g(X)] = \sum_i g(x_i)p(x_i)$ si X es discreta y $\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ si X es continua.

Varianza. La **varianza** representa la dispersión que tiene una variable aleatoria en torno a su media, es la distancia cuadrática promedio a la media.

La varianza de una variable aleatoria X se define como

$$\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])^2\big].$$

Habitualmente se denota como σ^2 ó σ_X^2 para hacer referencia a la variable aleatoria. La **desviación típica de una variable aleatoria** es la raíz cuadrada positiva de su varianza, $\sqrt{\mathrm{var}[X]}$, se denota como σ ó σ_X.

Propiedades de la varianza. Dada X una variable aleatoria y $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple

- $\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \big(\mathbb{E}[X]\big)^2$;
- $\mathrm{var}[b] = 0$;
- $\mathrm{var}[aX] = a^2\mathrm{var}[X]$;
- $\mathrm{var}[aX + b] = a^2\mathrm{var}[X]$.

Desigualdad de Chebichev. La desigualdad de Chebichev nos da una cota que depende de la varianza para la probabilidad de que los valores que toma una variable aleatoria estén en un entorno de su media.

Si una variable aleatoria X tiene media μ y varianza σ^2 y dado $k > 0$, la probabilidad de obtener un valor que diste de μ al menos $k\sigma$ es a lo sumo $1/k^2$.

Las siguientes cuatro expresiones son equivalentes y representan la desigualdad de Chebichev, sea $\mu = \mathbb{E}[X]$, $\sigma^2 = \mathrm{var}[X]$ y $k, \varepsilon > 0$,

$$P\big(|X-\mu| \geq k\sigma\big) \leq \frac{1}{k^2};$$
$$P\big(|X-\mu| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2};$$
$$P\big(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma\big) \geq 1 - \frac{1}{k^2};$$
$$P\big(\mu - \varepsilon < X < \mu + \varepsilon\big) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Otras medidas características asociadas a una variable aleatoria.

- **Mediana**: Me_X es un valor tal que $F(\mathrm{Me}_X) = 1/2$;
- **Cuantiles**: Dado $p \in (0,1)$, construimos x_p como el valor tal que $F(x_p) = p$;
- **Momento de orden k respecto de la media**: $\mu_k = \mathbb{E}[(X-\mu)^k]$;
- **Coeficiente de Asimetría**: $\mathrm{CA} = \mu_3/\sigma^3$;
- **Coeficiente de Apuntamiento o curtosis**: $\mathrm{CAp} = \mu_4/\sigma^4 - 3$.

Transformaciones de variables aleatorias. Dada una variable aleatoria X y una función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, puede interesarnos la distribución de la variable $Y = g(X)$. En general, tenemos

$$F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = P(X \in A_y)\,,$$

donde $A_y = \{x : g(x) \leq y\}$. En muchos casos, por ejemplo cuando g es monótona, los conjuntos A_y son sencillos de describir y su probabilidad fácil de calcular a partir de la función de distribución de X. En tales casos, lo más recomendable es seguir la expresión anterior y, caso de que necesitemos la función de densidad de Y, derivar con respecto de y.

Si X es discreta, tenemos

$$F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = \sum_{g(x_i) \leq y} p_X(x_i)\,;$$
$$p_Y(y) = P(g(X) = y) = \sum_{g(x_i) = y} p_X(x_i)\,.$$

Si X es continua y g es derivable e inyectiva, entonces la variable aletoria $Y = g(X)$ tiene función de densidad

$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|.$$

Independencia de variables aleatorias. Dos variables aleatorias X e Y definidas en un mismo espacio de probabilidad, se dicen **independientes** si para cualesquiera conjuntos de números reales B_1, B_2 se cumple

$$P\big((X \in B_1) \cap (Y \in B_2)\big) = P(X \in B_1)P(Y \in B_2).$$

Equivalentemente X e Y son independientes si para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple

$$P\big((X \leq x) \cap (Y \leq y)\big) = P(X \leq x)P(Y \leq y).$$

Propiedad de las variables independientes. Si dos variables aleatorias X e Y son independientes, entonces la varianza de su suma es igual a la suma de sus varianzas,

$$\mathrm{var}[X + Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y].$$