

---

# Introducción al Análisis de Series Temporales

## Cálculo de Tendencias y Estacionalidad

Los contenidos a desarrollar en este tema son los siguientes:

- Gráficos temporales.
- Series estacionarias y no estacionarias.
- Descomposición de una serie: tendencia, estacionalidad y componente irregular.
- Predicción.

---

# Introducción al Análisis de Series Temporales

## Cálculo de Tendencias y Estacionalidad

Lecturas recomendadas:

- Peña, D. (2005) *Análisis de series temporales*, Alianza Editorial.
- Box, G.E.P., Jenkins, G.M. y Reinsel, G. (1994) *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Editorial Prentice-Hall.
- Brockwell, J.P. y Davis, R.A. (1996) *Introduction to Time Series and Forecasting*, Editorial Springer-Verlag.
- Peña, D., Tiao, G.C. y Tsay, R.S. (2005) *A Course in Time Series Analysis*, Editorial John Wiley.

---

# Introducción

**Definición 1.** *Una **serie temporal** es una sucesión de observaciones de una variable tomadas en varios instantes de tiempo.*

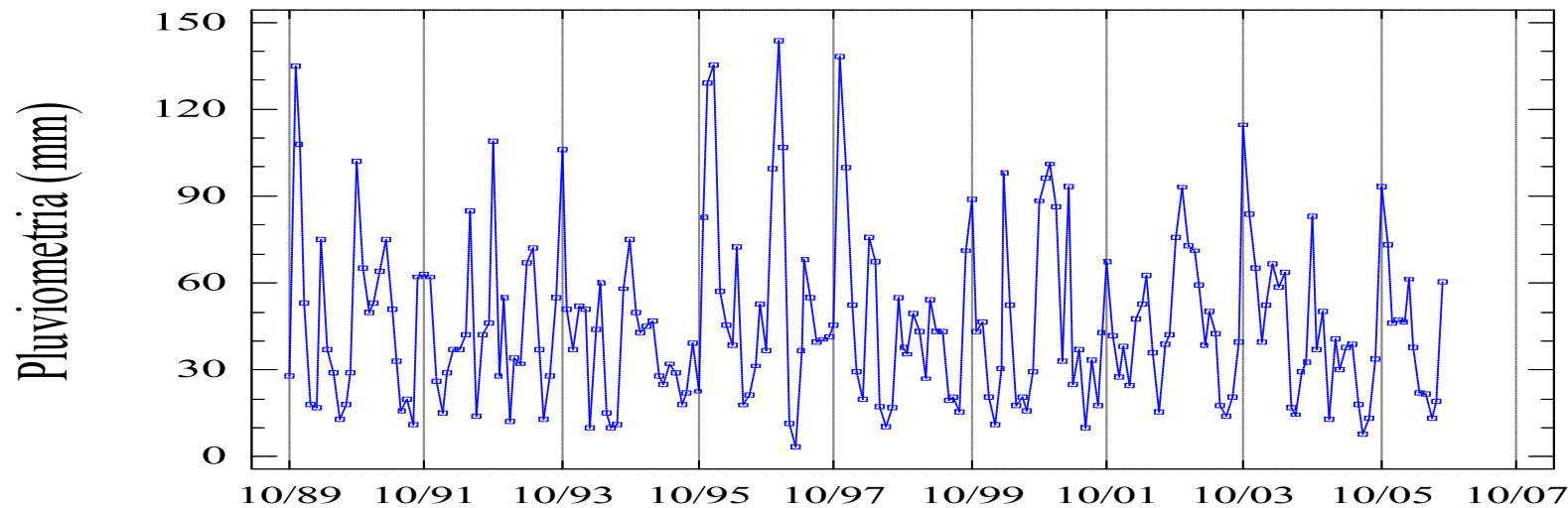
- Nos interesa estudiar los cambios en esa variable con respecto al tiempo.
- Predecir sus valores futuros.
  
- ▶ Ejemplos de series temporales podemos encontrarlos en muchos campos de conocimiento:
  - Economía: producto interior bruto anual, tasa de inflación, tasa de desempleo, etc.
  - Demografía: nacimientos anuales, tasa de dependencia, etc.
  - Meteorología: temperaturas máximas, medias o mínimas, precipitaciones diarias, etc.
  - Medio ambiente: concentración media mensual de nitratos en agua, alcalinidad media anual del suelo, emisiones anuales de CO<sub>2</sub>, etc.

---

## Representación gráfica de una serie temporal

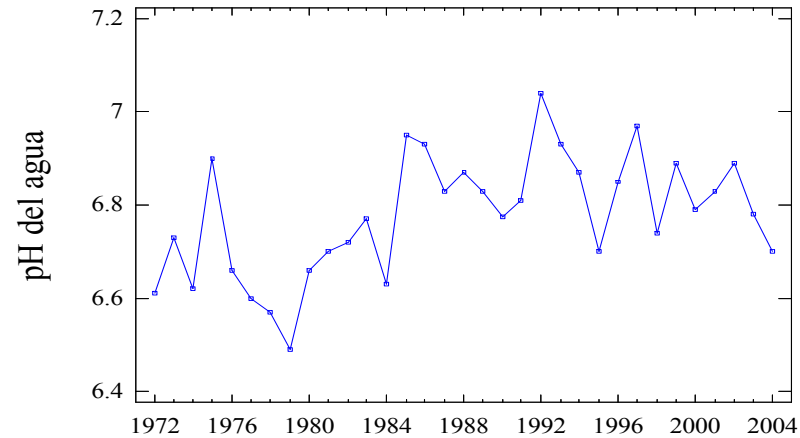
A menudo, se representa la serie en un **gráfico temporal**, con el valor de la serie en el eje de ordenadas y los tiempos en el eje de abscisas.

**Ejemplo 1.** *El siguiente gráfico temporal muestra la media de los pluviómetros peninsulares (Fuente I.N.M.) para el período Octubre/1989 a Septiembre/2006.*

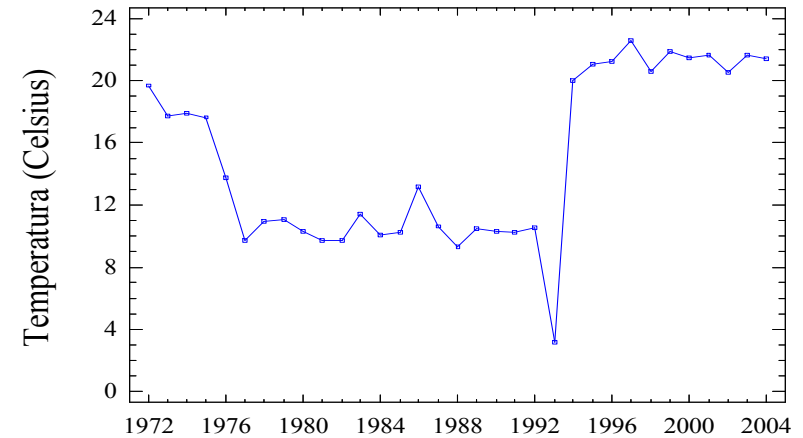


# Ejemplos de gráfico temporal

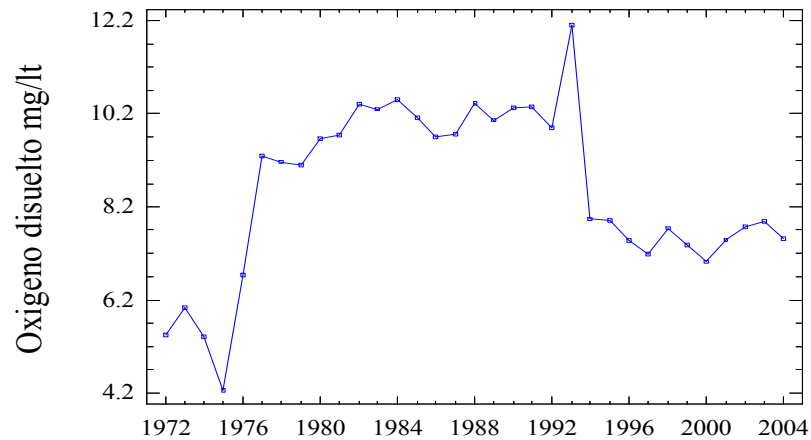
Rio Santa Cruz (Washington, USA)



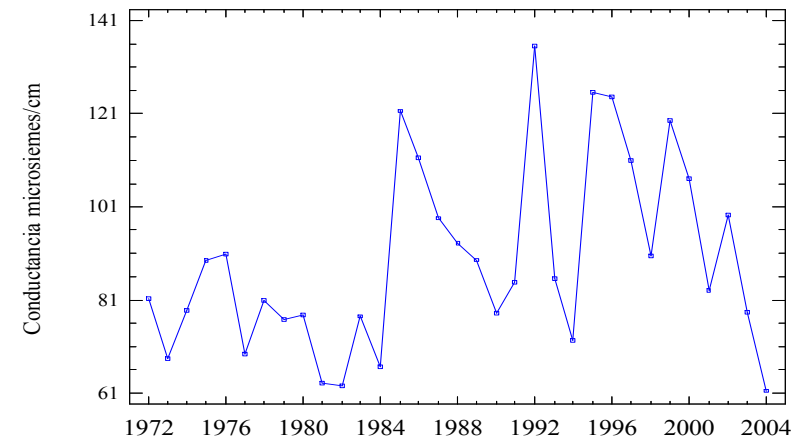
Rio Santa Cruz (Washington, USA)



Rio Santa Cruz (Washington, USA)



Rio Santa Cruz (Washington, USA)

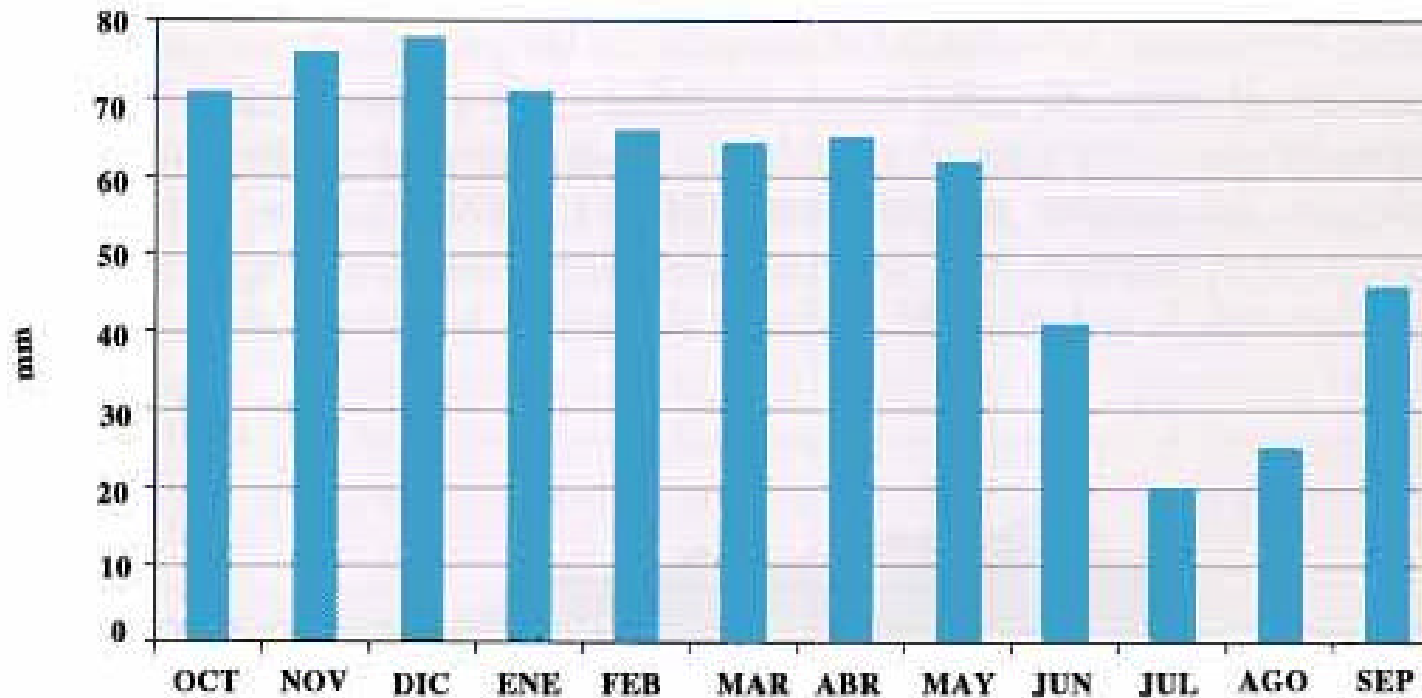


---

## Otros tipos de gráficos temporales

### Gráficos por períodos de observación.

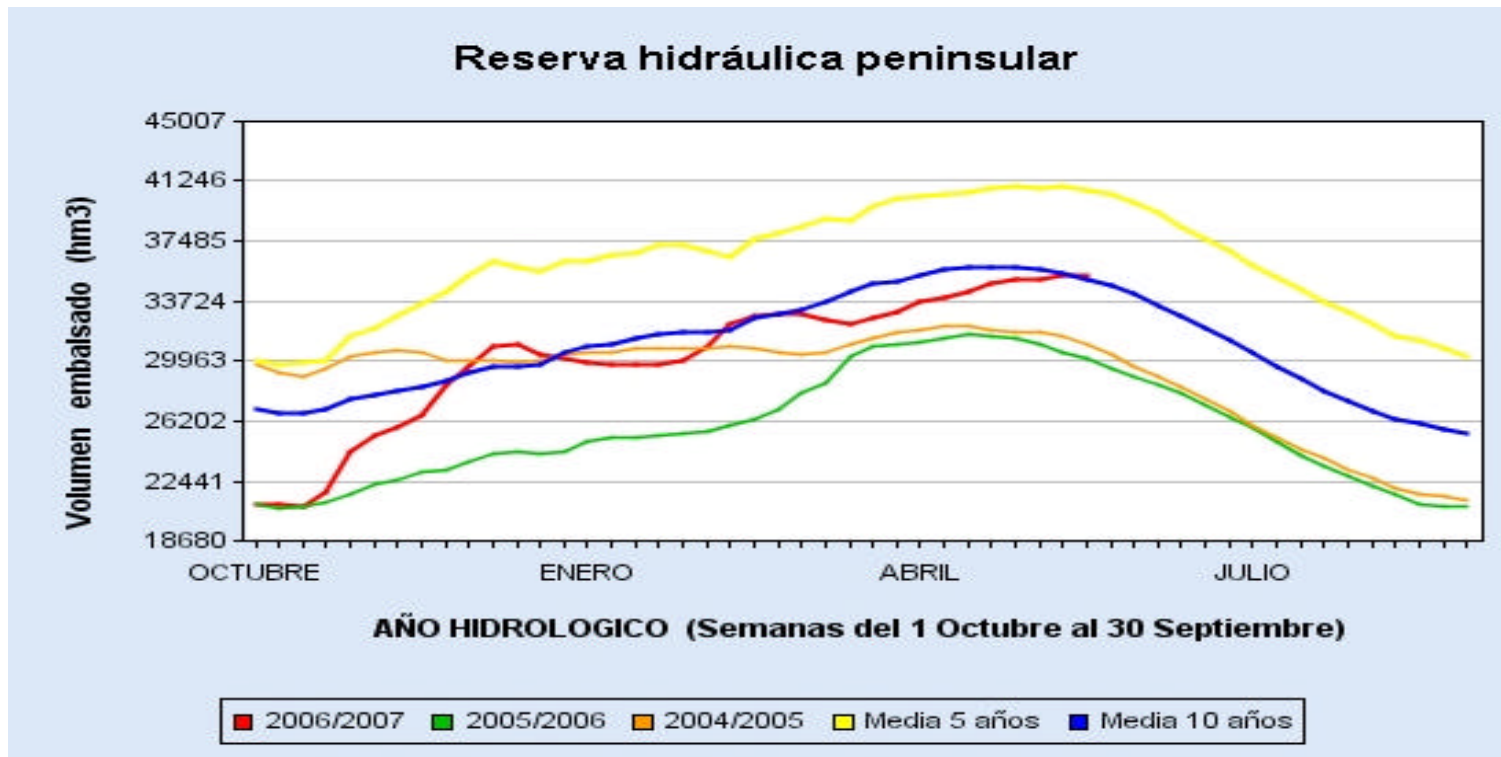
**Ejemplo 2.** *Distribución mensual de la precipitación media en España*  
*Tomado de [www.hispagua.cedex.es](http://www.hispagua.cedex.es).*



## Otros tipos de gráficos temporales

Gráficos por períodos de observación plurianuales.

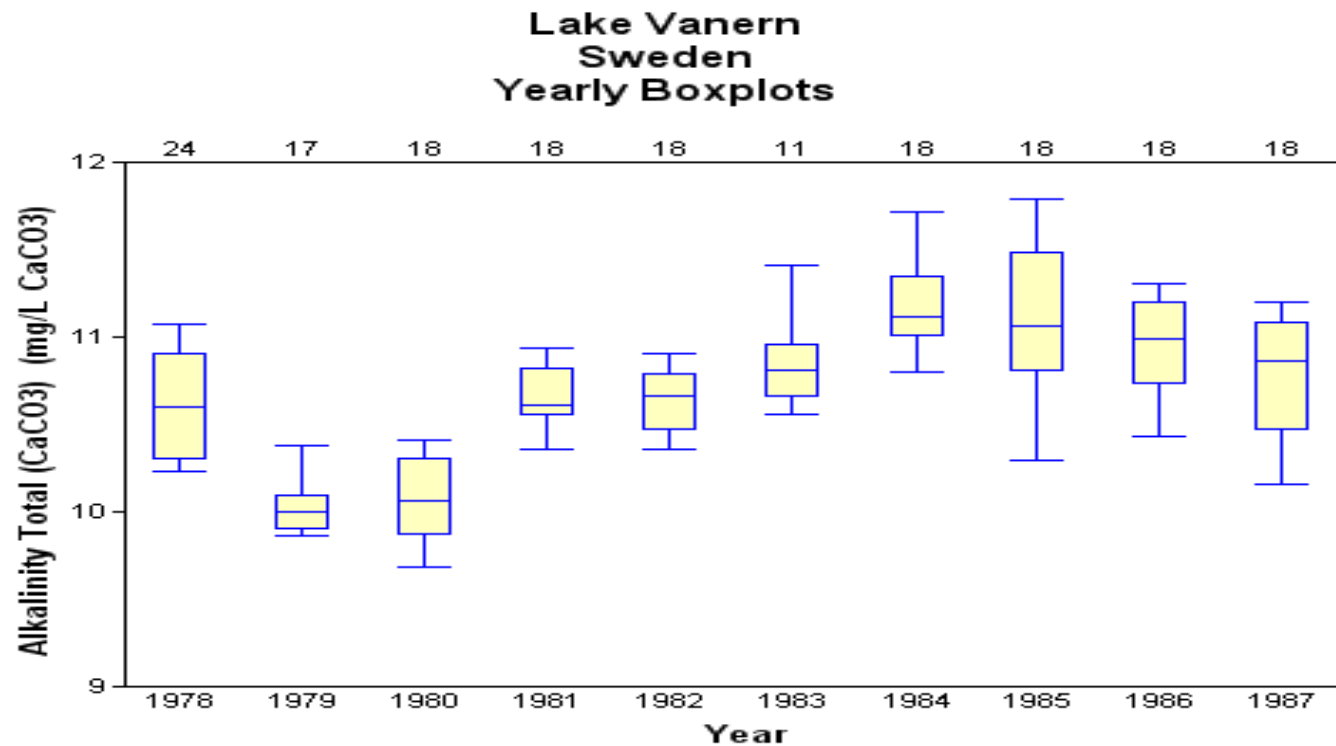
Ejemplo 3. *Reserva hidrológica peninsular. Tomado de [www.mma.es](http://www.mma.es).*



## Otros tipos de gráficos temporales

### Boxplot anual.

Ejemplo 4. *Alcalinidad total (mg/lit). Tomado de [www.gemstat.org](http://www.gemstat.org).*



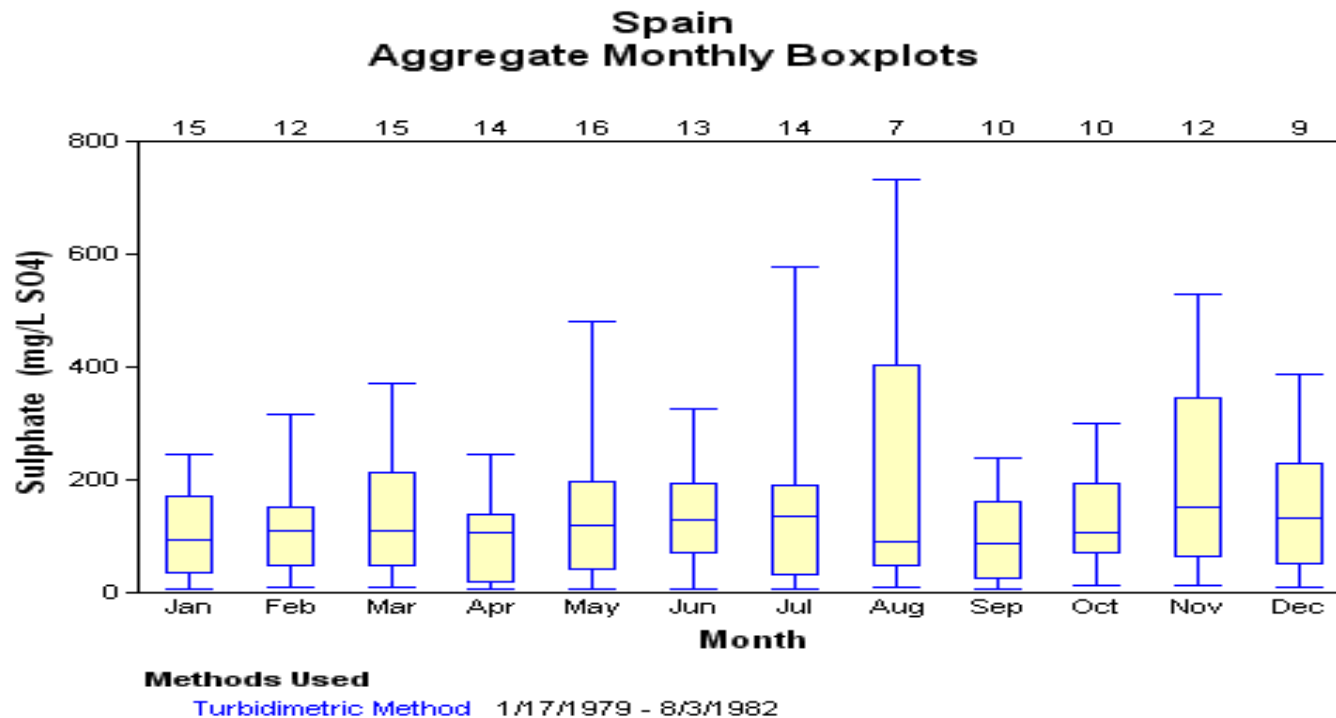


---

## Otros tipos de gráficos temporales

**Boxplot por períodos de observación.**

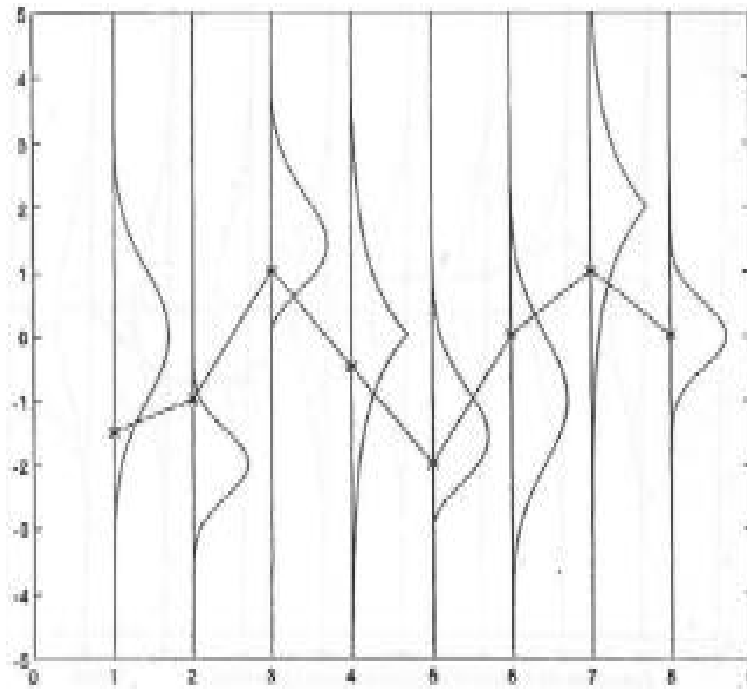
**Ejemplo 5.** *Concentración de sulfatos (mg/lit).* Tomado de [www.gemstat.org](http://www.gemstat.org).



---

## Clasificación de series temporales

**Definición 2.** Una **serie temporal** es una sucesión de observaciones de una variable tomadas en varios instantes de tiempo. Estas observaciones provienen de una distribución que puede ser diferente en cada instante del tiempo.



No somos capaces de tratar cualquier tipo de serie temporal, ya que en cada instante tenemos una variable con distinta distribución de la que sólo observamos un dato. **Ignoramos mucho y tenemos poca información.**

**Necesitamos imponer condiciones a la serie**

---

## Clasificación de series temporales

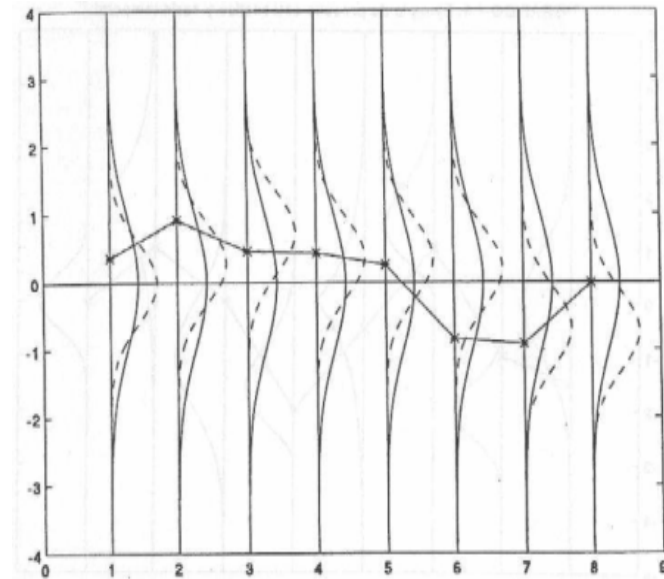
- ▶ Una serie es **estacionaria** si la media y la variabilidad se mantienen constantes a lo largo del tiempo.
- ▶ Una serie es **no estacionaria** si la media y/o la variabilidad cambian a lo largo del tiempo.
  - ▶ Series no estacionarias pueden mostrar **cambios de varianza**.
  - ▶ Series no estacionarias pueden mostrar una **tendencia**, es decir que la media crece o baja a lo largo del tiempo.
  - ▶ Además, pueden presentar **efectos estacionales**, es decir que el comportamiento de la serie es parecido en ciertos tiempos periódicos en el tiempo.

---

## Clasificación de series temporales - Series estacionarias

**Definición 3.** Una serie temporal es **estacionaria** en sentido amplio si:

- $E[X_t] = \mu$  para todo  $t$
- $Var(X_t) = \sigma^2$  para todo  $t$ .
- $Cov(X_t, X_{t+k}) = \gamma_k$  para todo  $t$  y  $k$ .



El ejemplo más simple es el RUIDO BLANCO, cuando la media y la covarianza son siempre cero.

---

## Clasificación de series temporales - Series estacionarias

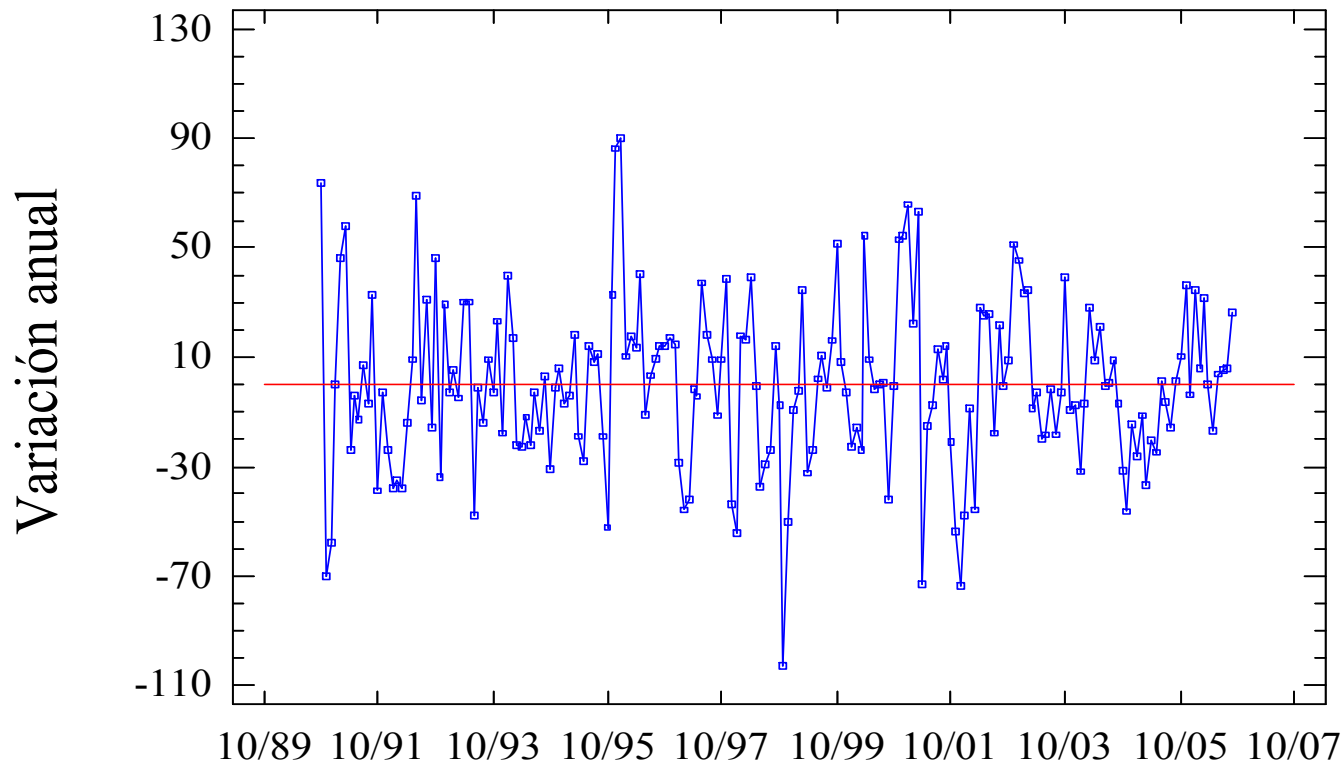
### ¿Por qué es bueno que las series sean estacionarias?

- Con series estacionarias podemos obtener predicciones fácilmente.
- Como la media es constante, podemos estimarla con todos los datos, y utilizar este valor para predecir una nueva observación.
- También se pueden obtener intervalos de predicción (confianza) para las predicciones asumiendo que  $X_t$  sigue una distribución conocida, por ejemplo, normal.

---

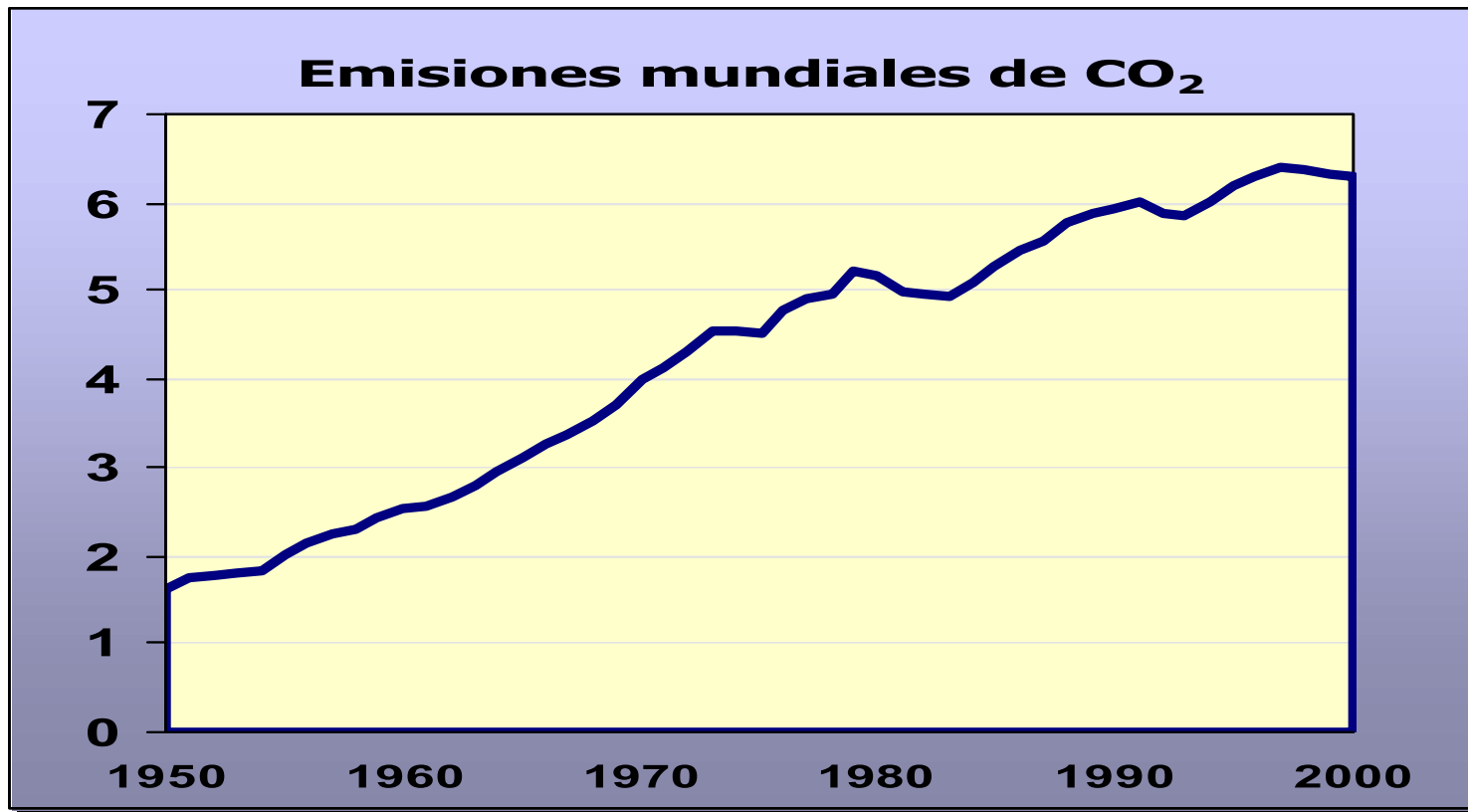
## Clasificación de series temporales - Ejemplos

**Serie estacionaria:** Variaciones anuales de la media de los pluviómetros peninsulares para el período Octubre/1990 a Septiembre/2006.



## Clasificación de series temporales - Ejemplos

Serie no estacionaria: Emisiones mundiales de CO<sub>2</sub>.



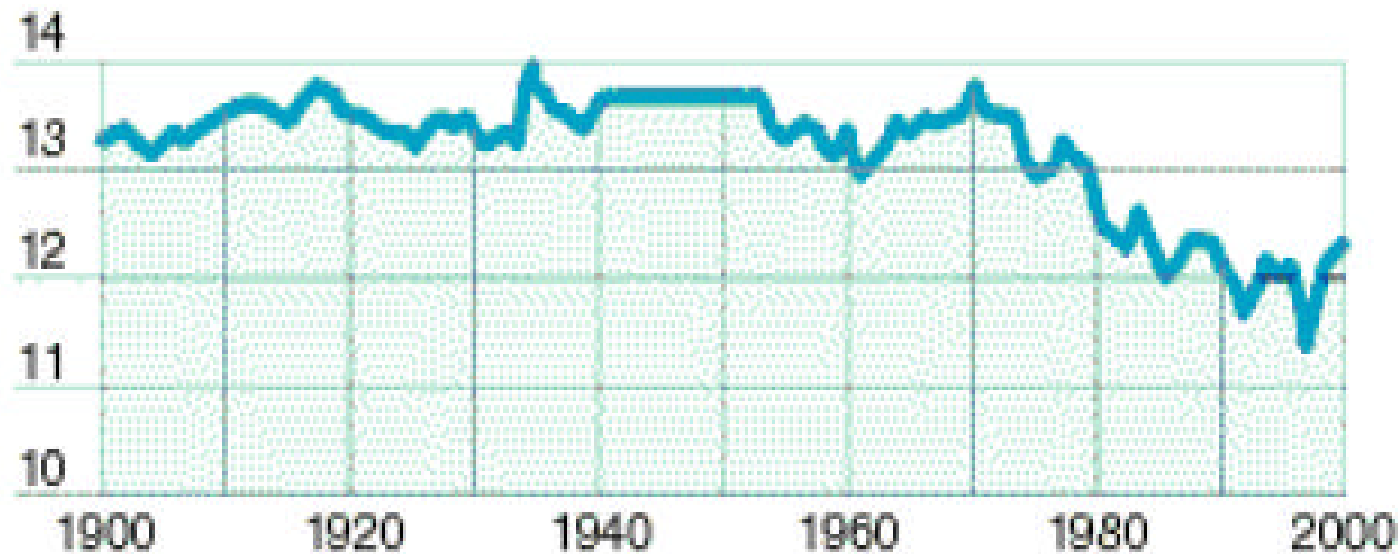
Tendencia

## Clasificación de series temporales - Ejemplos

**Serie no estacionaria:** Superficie de hielo en el Ártico.

### Evolución de la superficie de hielo en el Ártico

En millones de  $\text{km}^2$

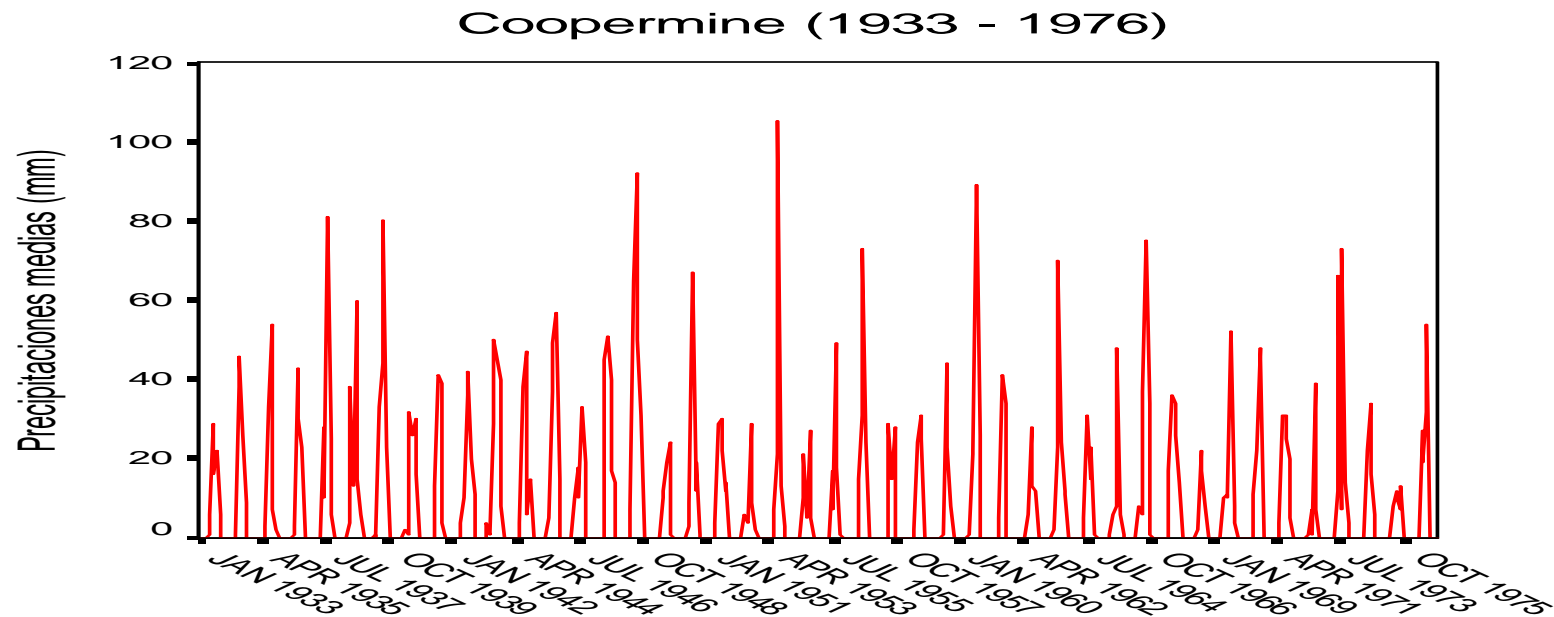


Cambios en la tendencia



# Clasificación de series temporales - Ejemplos

**Serie no estacionaria:** Precipitaciones medias (mm).



Fuente de datos: P.C. Baracos, K.W. Hipel & A.I. McLeod (1981) Modeling hydrologic time series from the Arctic, *Water Resources Bulletin*, Vol. 17.

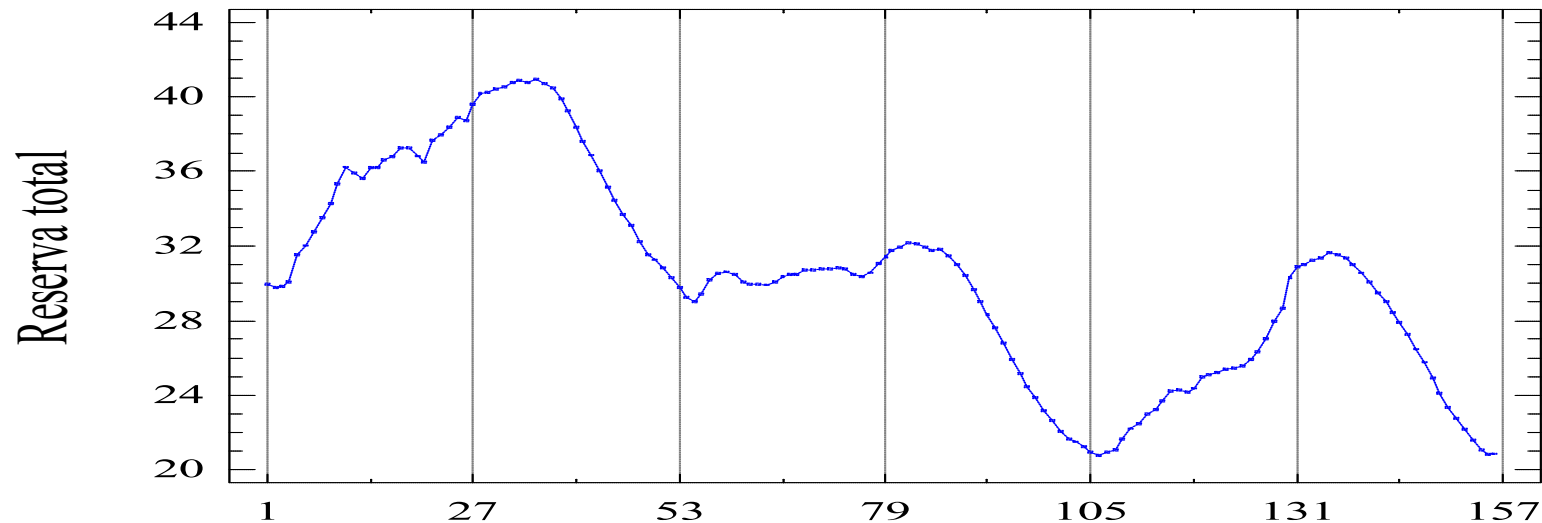
Estacionalidad

---

## Clasificación de series temporales - Ejemplos

**Serie no estacionaria:** Agua embalsada y energía disponible ( $\text{hm}^3$ ).

*Años hidrológicos 2003/2004 a 2005/2006*

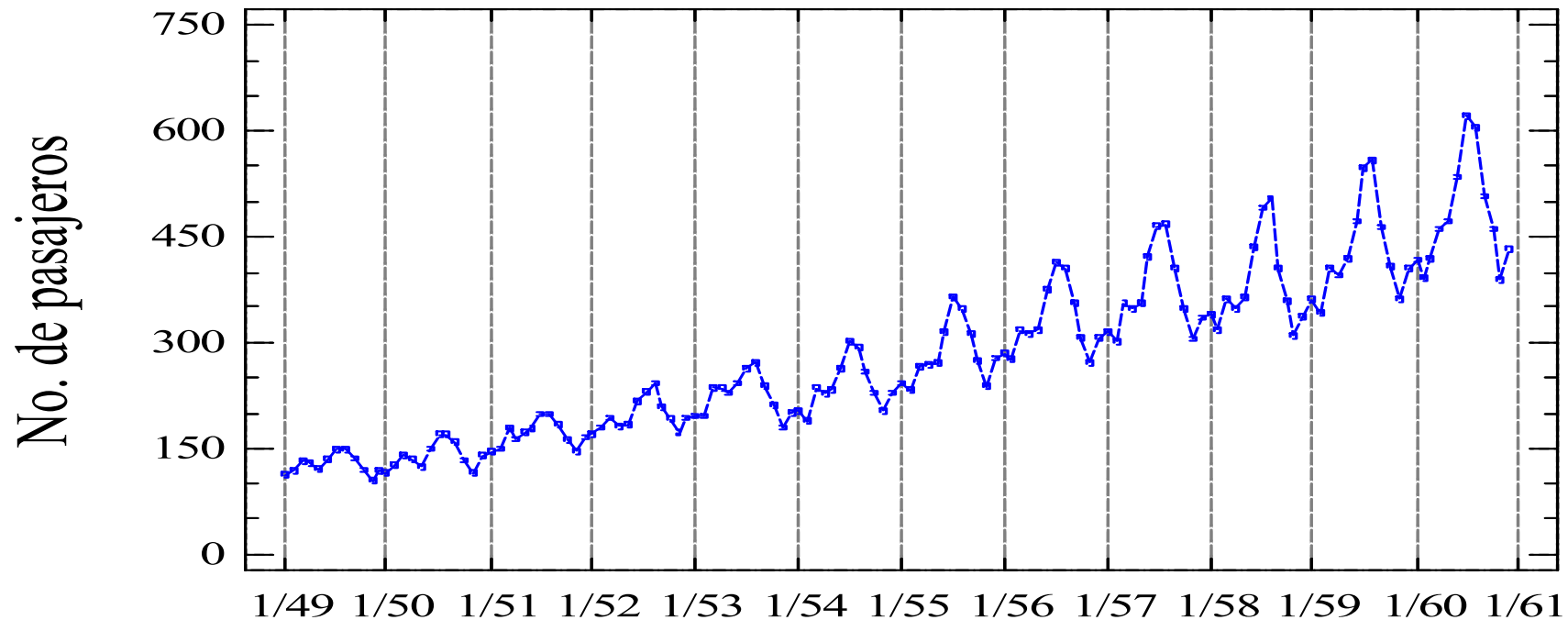


Fuente de datos: Boletín hidrológico, Ministerio de Medio Ambiente.

Tendencia + Estacionalidad

## Clasificación de series temporales - Ejemplos

**Serie no estacionaria:** Número mensual de pasajeros de avión, USA, Enero:1949 a Diciembre:1960



Tendencia, **Heteroscedasticidad** y Estacionalidad

Fuente de datos: Box, G. & Jenkins, G. (1976) *Time Series Analysis: Forecasting and Control*.

---

## Componentes de una serie temporal

En muchos casos, se supone que la serie temporal es la **suma** de varias componentes:

$$X_t = T_t + S_t + I_t$$

Valor observado = Tendencia + Estacionalidad + Irregular
--

**Tendencia:** comportamiento o movimiento suave de la serie a largo plazo.

**Estacionalidad:** movimientos de oscilación dentro del año.

**Irregular:** variaciones aleatorias alrededor de los componentes anteriores.

► En esos casos, es interesante obtener o “aislar” los distintos componentes.

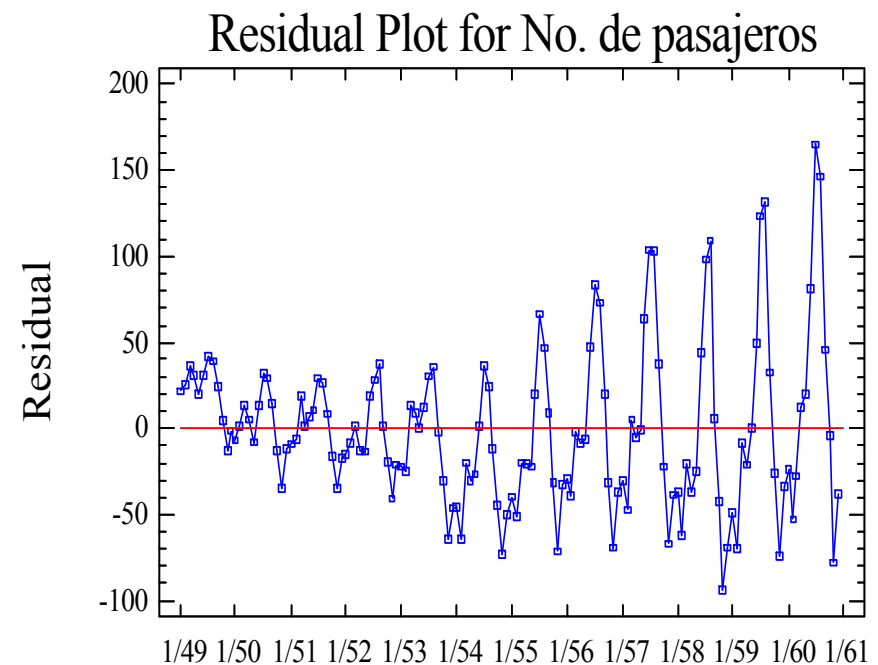
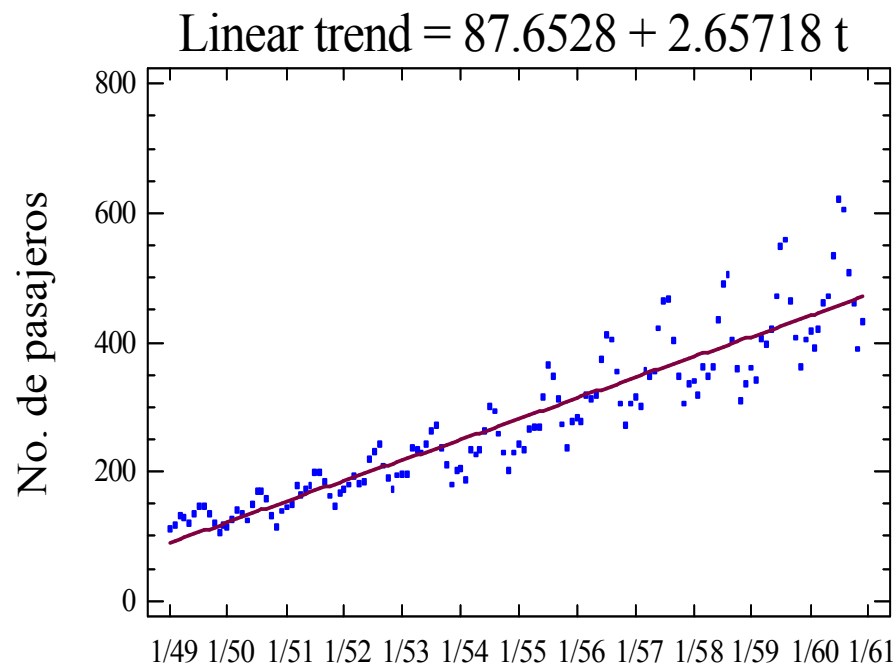
## Análisis de la tendencia

En algunos casos, se puede suponer una relación determinista entre  $T_t$  y  $t$ , por ejemplo una tendencia lineal

$$T_t = a + bt$$

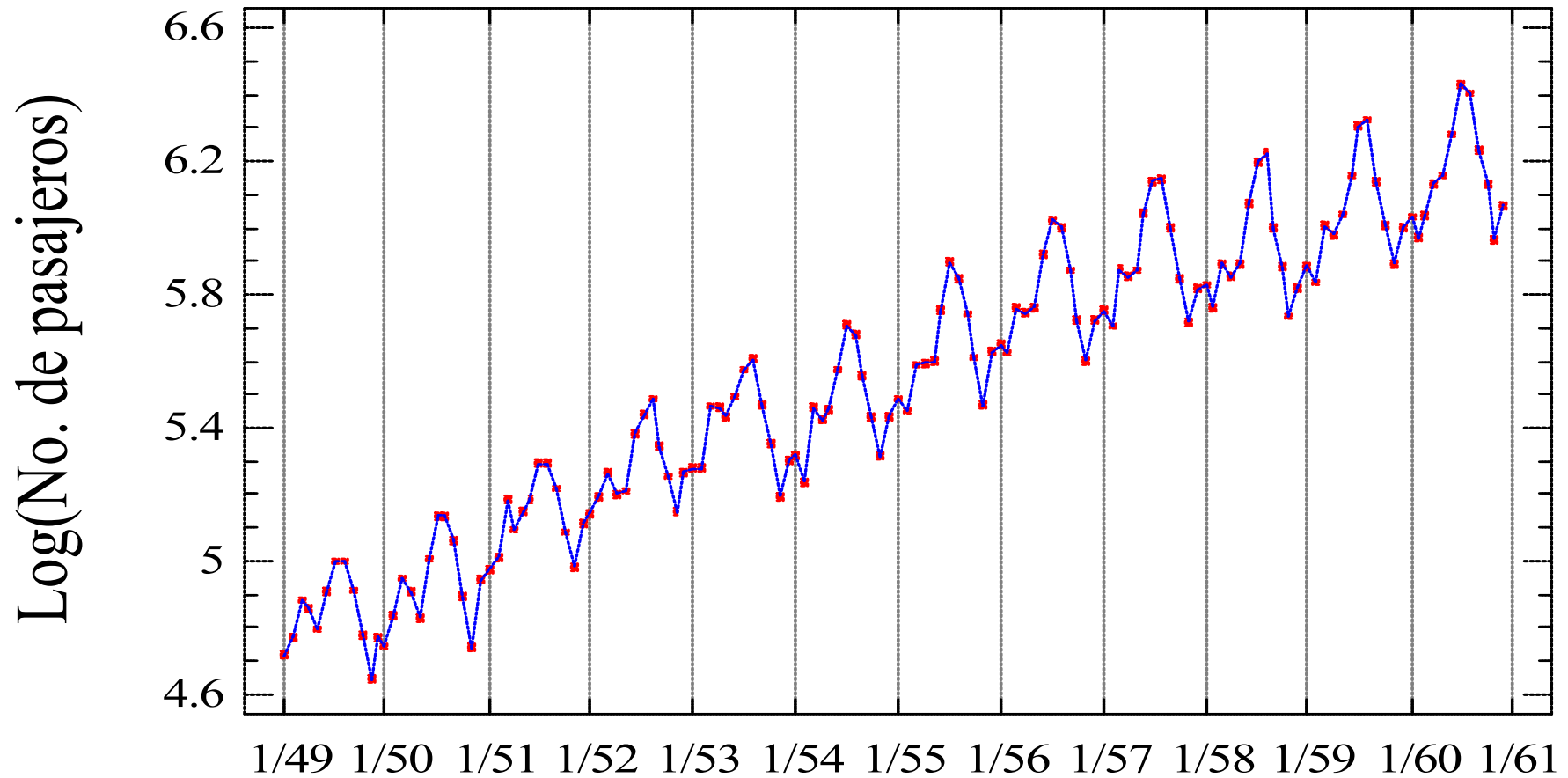
que se estima mediante el método de mínimos cuadrados.

### Ejemplo 6.



## Análisis de la tendencia - Ejemplo 6

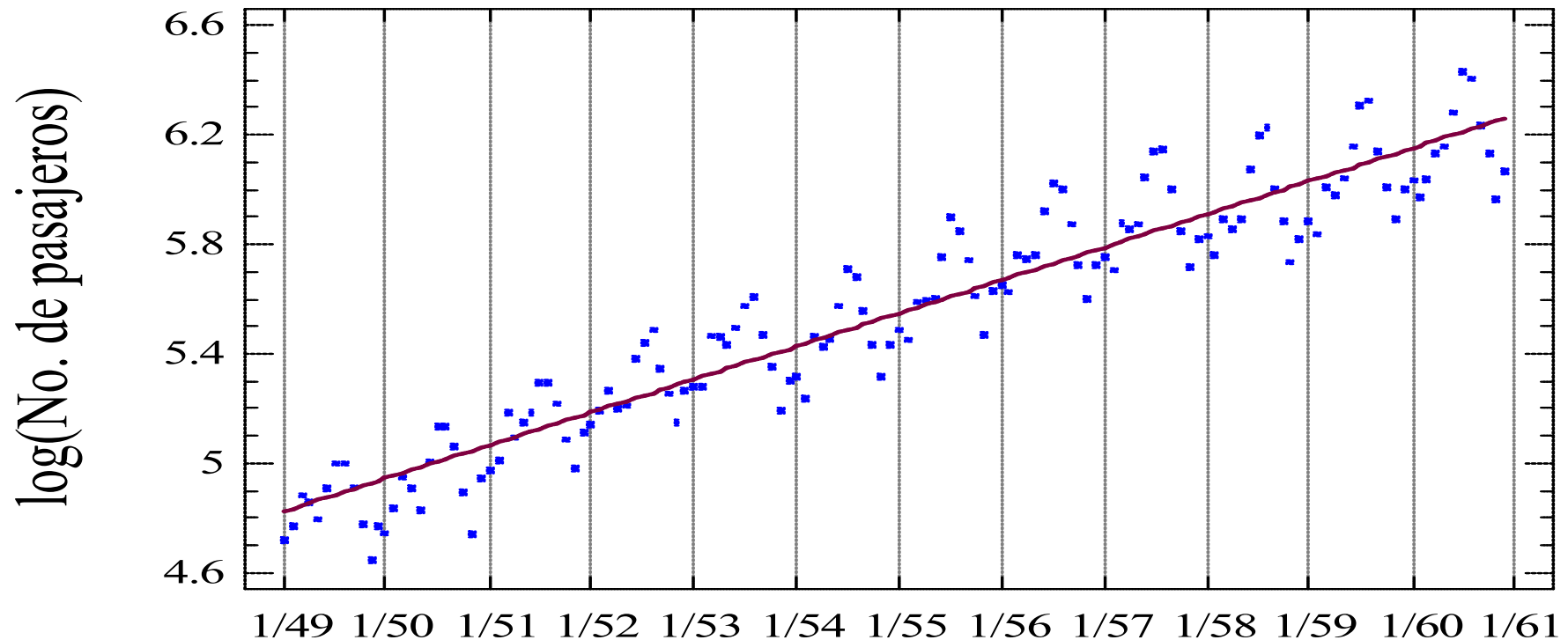
**Ejemplo 6.** *En primer lugar, eliminamos la heteroscedasticidad mediante una transformación logarítmica.*



## Análisis de la tendencia - Ejemplo 6

**Ejemplo 6.** *Sobre la serie transformada estimamos una tendencia lineal.*

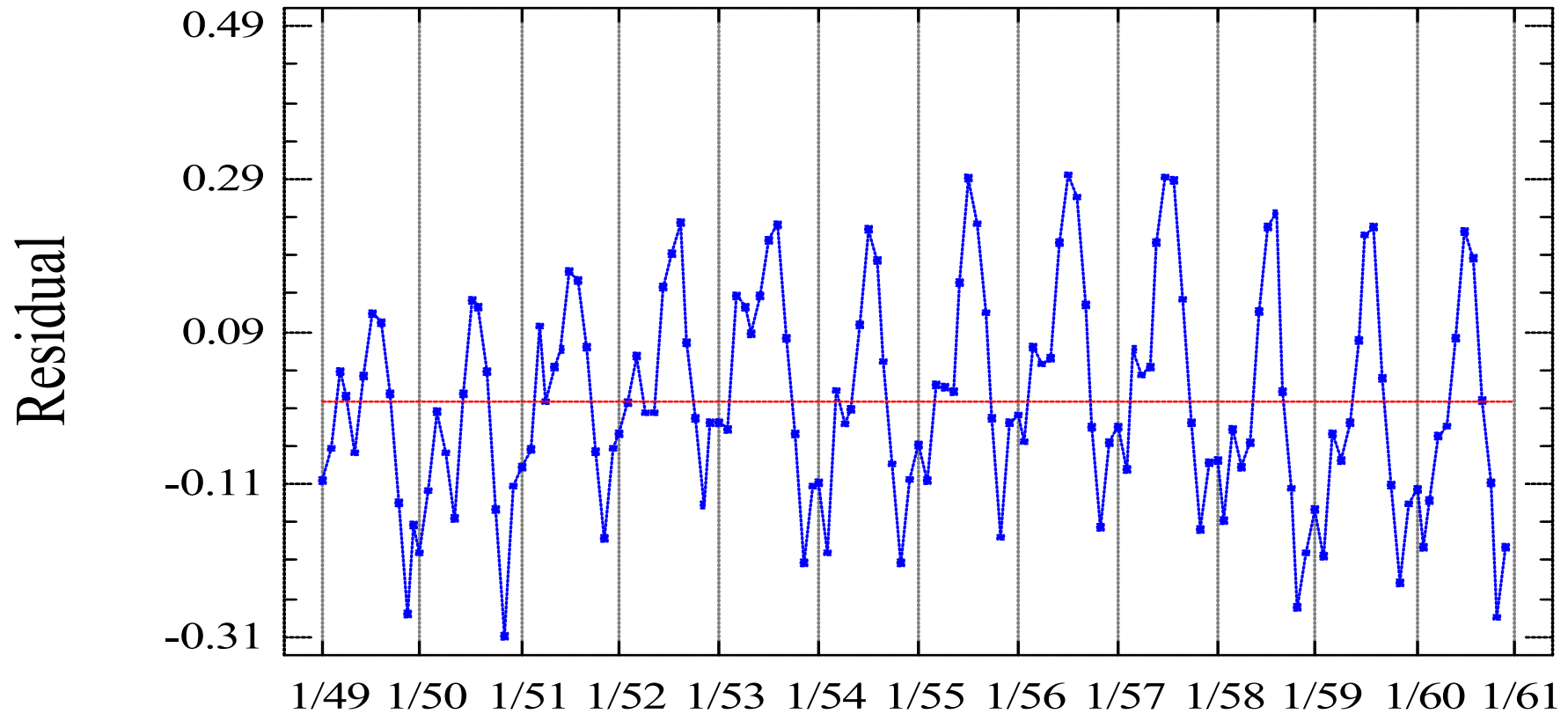
$$\text{Linear trend} = 4.81367 + 0.0100484 t$$



► Se observa una clara tendencia creciente lineal, además de efectos estacionales.

## Análisis de la tendencia - Ejemplo 6

**Ejemplo 6.** *Obtenemos la serie de residuos,  $X_t - T_t$ :*



► Se mantienen los efectos estacionales.

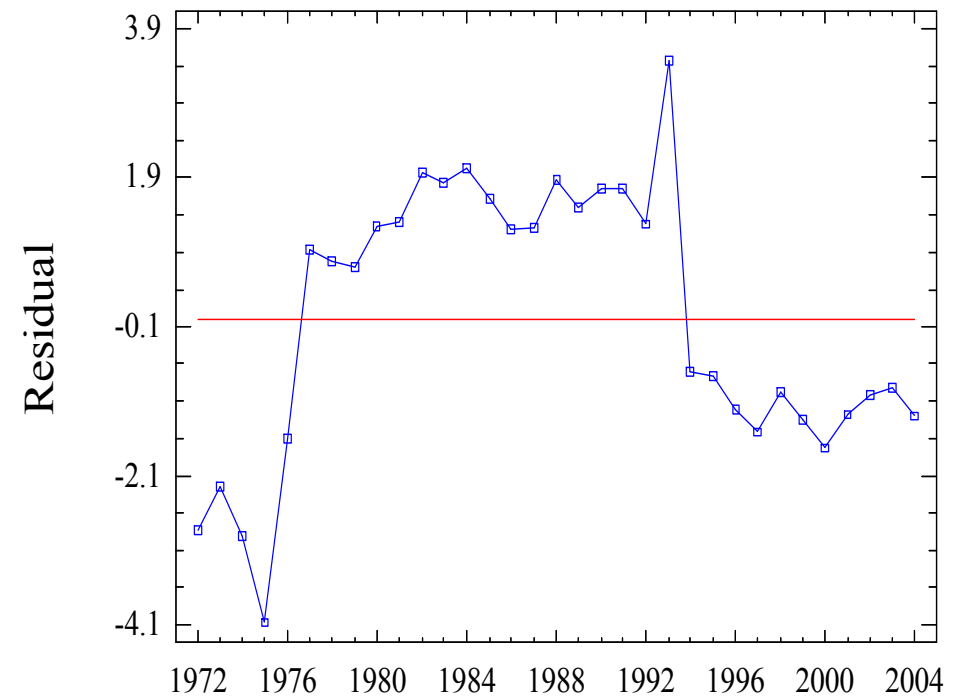
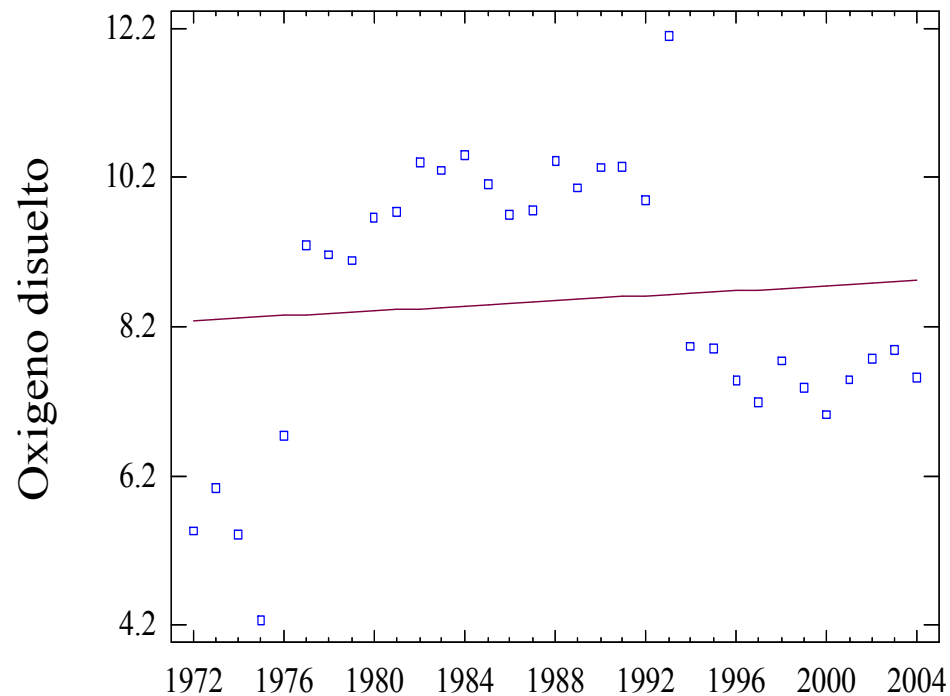


## Análisis de la tendencia - Ejemplo 7

**Ejemplo 7.** *Oxígeno disuelto (ml/lt). Rio Santa Cruz (Washington, USA).*

$$\text{Linear trend} = -24.9531 + 0.0168516 t$$

$$\text{Linear trend} = -24.9531 + 0.0168516 t$$



► Una tendencia determinista (lineal) no parece adecuada.

---

## Tendencia evolutiva

- ▶ A menudo, la tendencia de la serie no sigue una recta y evoluciona a lo largo del tiempo.
- ▶ En ese caso, un método general de estimar  $T_t$  es suponer que evoluciona lentamente en el tiempo, y que se puede aproximar con una función sencilla para intervalos cortos del tiempo.

**Ejemplo 8.** *Si una recta es una representación válida para tres periodos consecutivos:*

$$\begin{cases} T_{t-1} &= T_t - \Delta T \\ T_t &= T_t \\ T_{t+1} &= T_t + \Delta T \end{cases}$$

*Si hacemos la media de las tres observaciones consecutivas,  $m_t = \frac{x_{t-1} + x_t + x_{t+1}}{3}$ , tendríamos que:*

$$m_t = T_t + \frac{I_{t-1} + I_t + I_{t+1}}{3}$$

*es decir "descubriríamos" la tendencia subyacente.*

---

## Tendencia evolutiva

**Definición 4.** Para instante  $t$ , se define **la media móvil de orden 3** de la serie como

$$m_t = \frac{x_{t-1} + x_t + x_{t+1}}{3}.$$

Suponemos que la tendencia  $T_t$  satisface

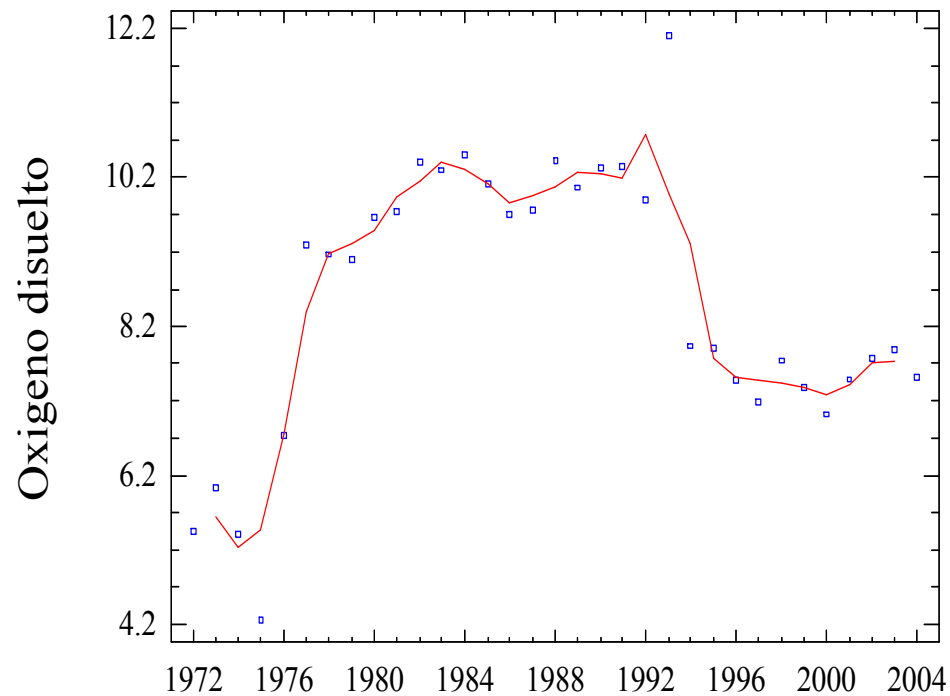
$$T_t = m_t - \frac{I_{t-1} + I_t + I_{t+1}}{3}.$$

- ▶ Como la media del componente irregular es cero, podemos suponer que la media de los tres valores  $(I_{t-1}, I_t, I_{t+1})$  es pequeña, de esta manera  $m_t$  recoge fundamentalmente la tendencia de la serie en el instante  $t$ .
- ▶ Es posible calcular medias móviles de ordenes más altos. Cuando crece el orden, el valor de  $m_t$  cambia más suavemente.

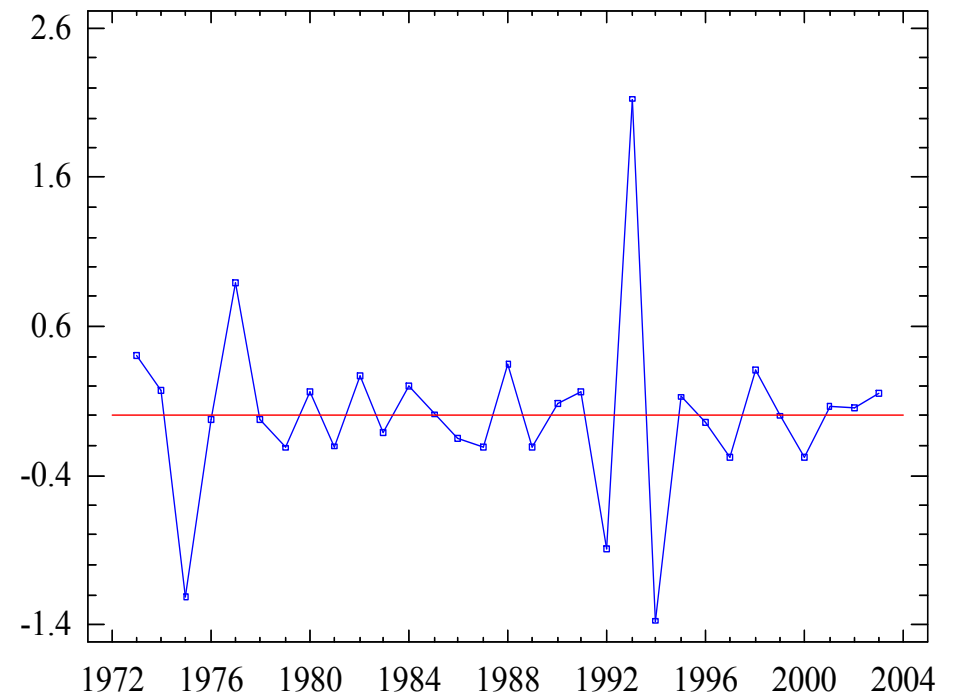
# Análisis de la tendencia - Ejemplo 7

## Ejemplo 9.

Smoothed Time Series Plot for Oxígeno disuelto



Time Series Plot of Residuals for Oxígeno disuelto

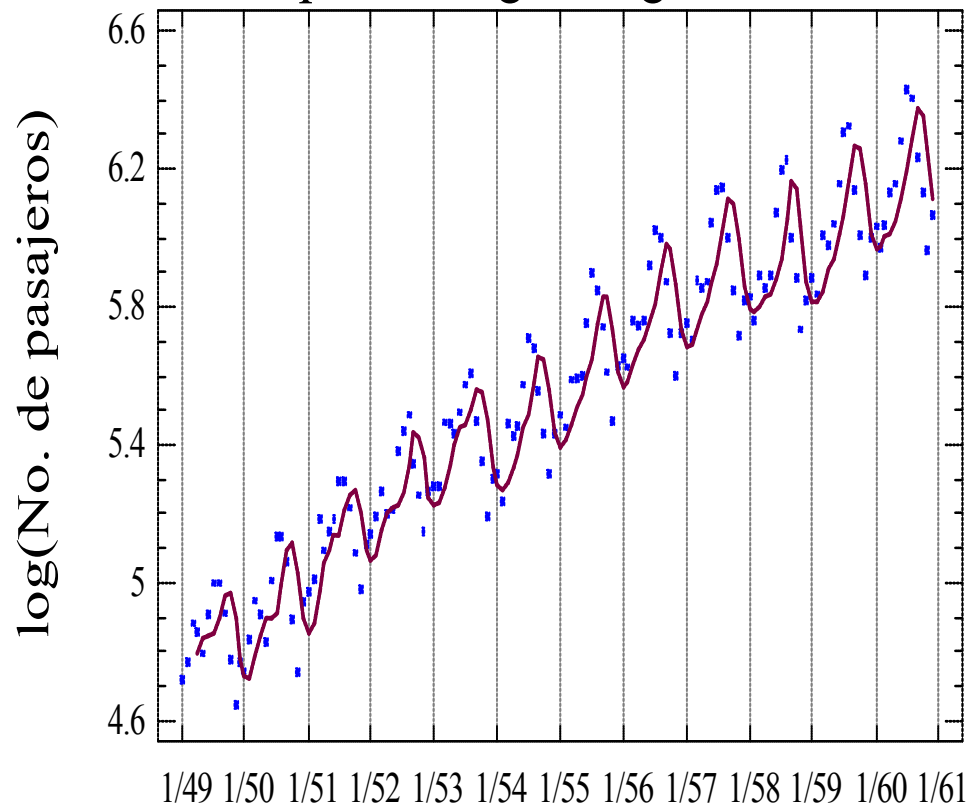


► En los residuos no se observa una tendencia clara.

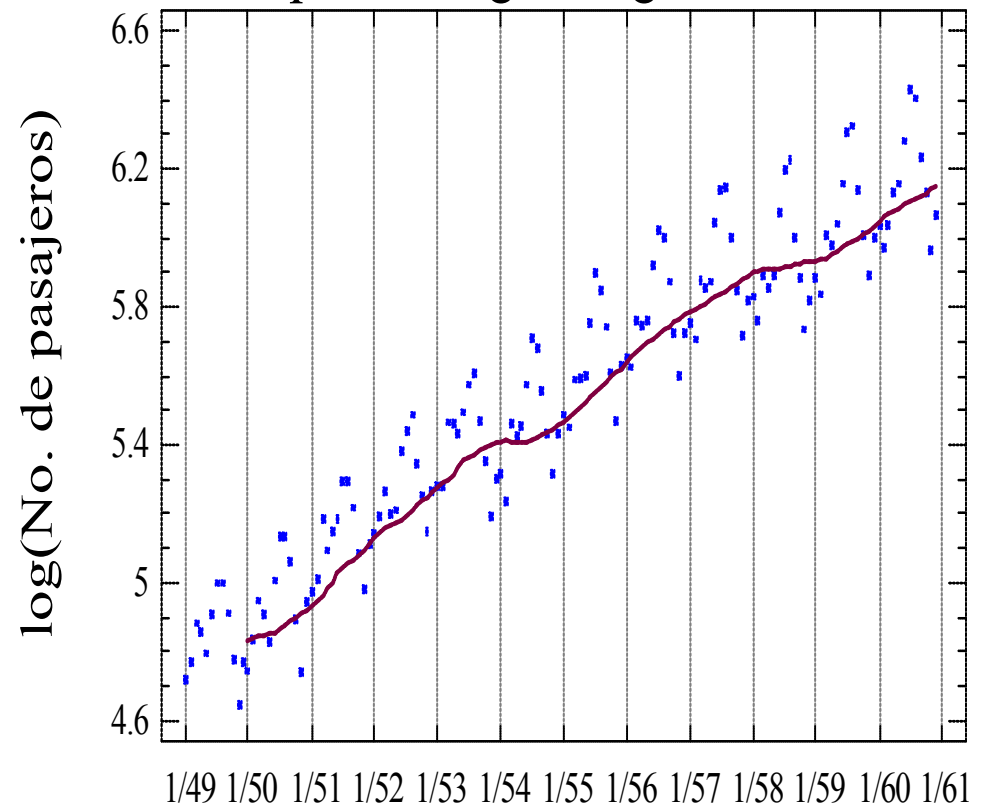
## Análisis de la tendencia - Ejemplo 6

**Ejemplo 10.** *Tendencia evolutiva en el número de pasajeros.*

Simple moving average of 3 terms



Simple moving average of 12 terms



► Con medias móviles de ordenes altos, suavizamos los efectos estacionales.

---

## Diferenciación de la serie

- ▶ Es un método más general que consiste en no hacer ninguna hipótesis sobre la forma de la tendencia a corto plazo y suponer simplemente que evoluciona lentamente en el tiempo.

Asumimos que la tendencia en el instante  $t$  es muy próxima a la tendencia en el instante  $t - 1$ , y construimos una nueva serie:

$$y_t = x_t - x_{t-1}$$

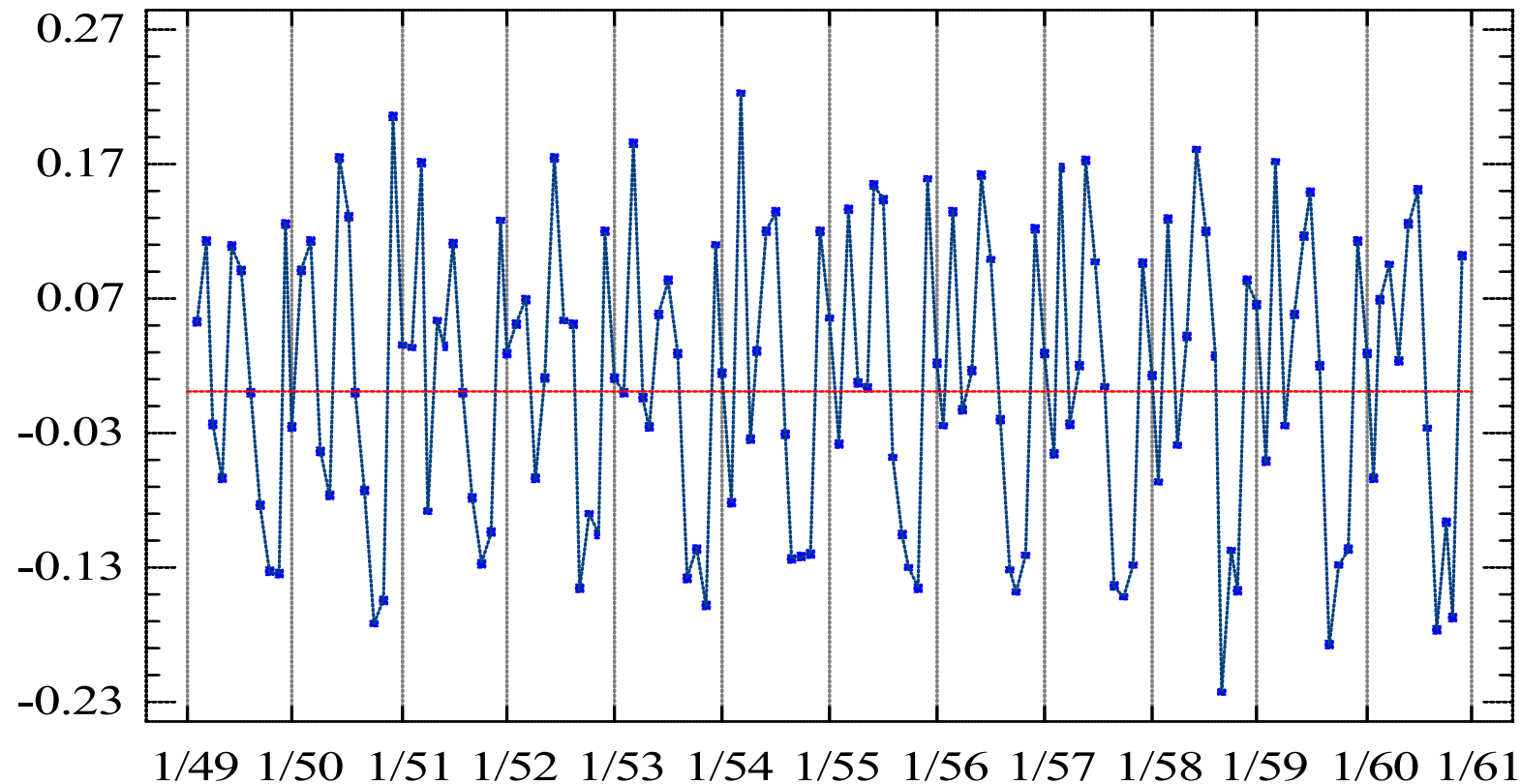
que denominamos **serie diferenciada**.

- ▶ Diferenciar la serie equivale a suponer que la tendencia en  $t$  es el valor de serie en  $t - 1$ :

$$T_t = x_{t-1}.$$

## Diferenciación de la serie - Ejemplo 6

**Ejemplo 11.** *Obtener la serie diferenciada para los datos del Ejemplo 6.*

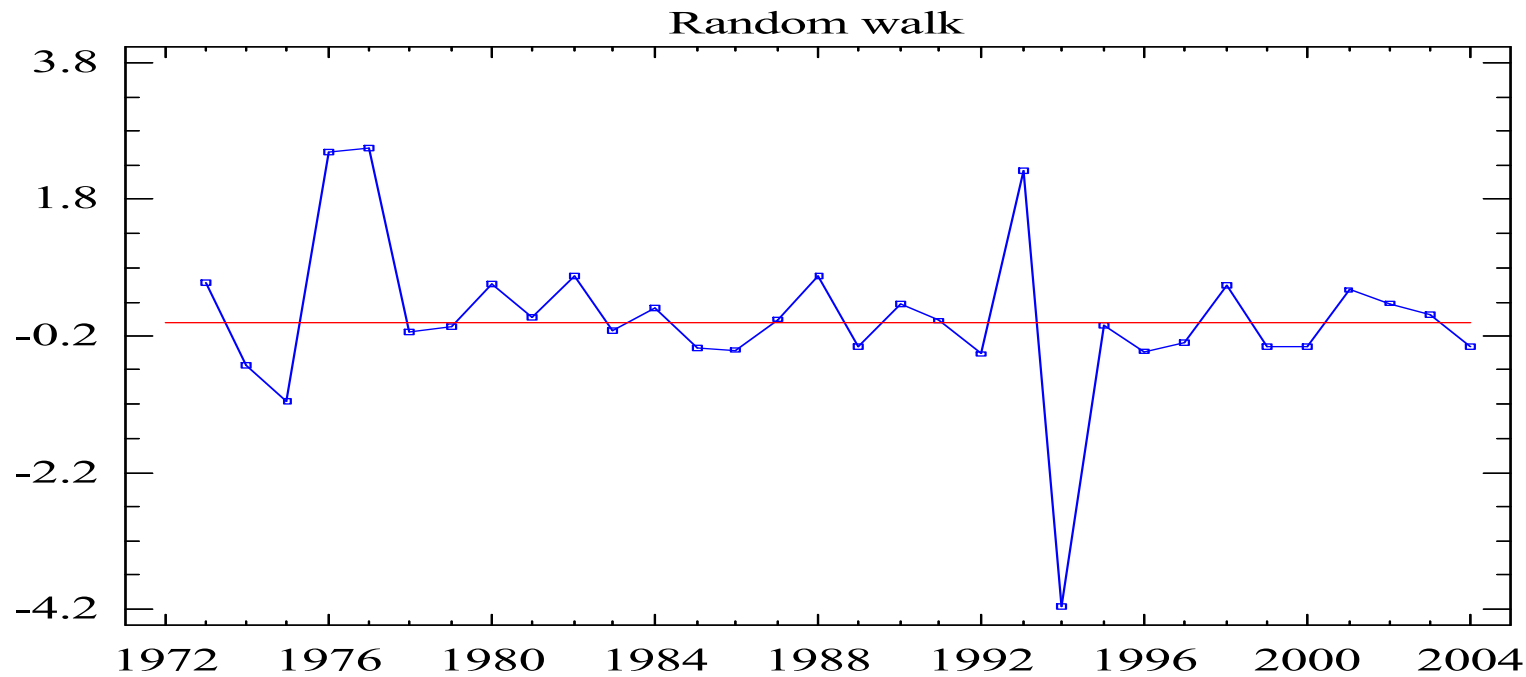


► La serie diferenciada no muestra una tendencia clara y mantiene los efectos estacionales.

## Diferenciación de la serie - Ejemplo 7

**Ejemplo 12.** *Obtener la serie diferenciada para los datos del Ejemplo 7.*

### Residual Plot for Oxígeno disuelto



► La serie diferenciada no muestra una tendencia clara.



## Análisis de la estacionalidad

- ▶ Un método de estimar el efecto estacional (v.g., de cada mes) es considerar cómo varía la media del período (mes) respecto de la media global.

		Años				Medias	$S$
		1	2	...	$n$		
Meses	enero	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1n}$	$\bar{x}_{1\bullet}$	$S_1$
	febrero	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2n}$	$\bar{x}_{2\bullet}$	$S_2$
	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮
	noviembre	$x_{11\ 1}$	$x_{11\ 2}$	...	$x_{11\ n}$	$\bar{x}_{11\bullet}$	$S_{11}$
	diciembre	$x_{12\ 1}$	$x_{12\ 2}$	...	$x_{12\ n}$	$\bar{x}_{12\bullet}$	$S_{12}$
	Medias	$\bar{x}_{\bullet 1}$	$\bar{x}_{\bullet 2}$	...	$\bar{x}_{\bullet n}$	$\bar{x}_{\bullet\bullet}$	

- ▶ Los **coeficientes estacionales** son:

$$S_i = \bar{x}_{i\bullet} - M \quad \text{para } i = 1, \dots, 12.$$

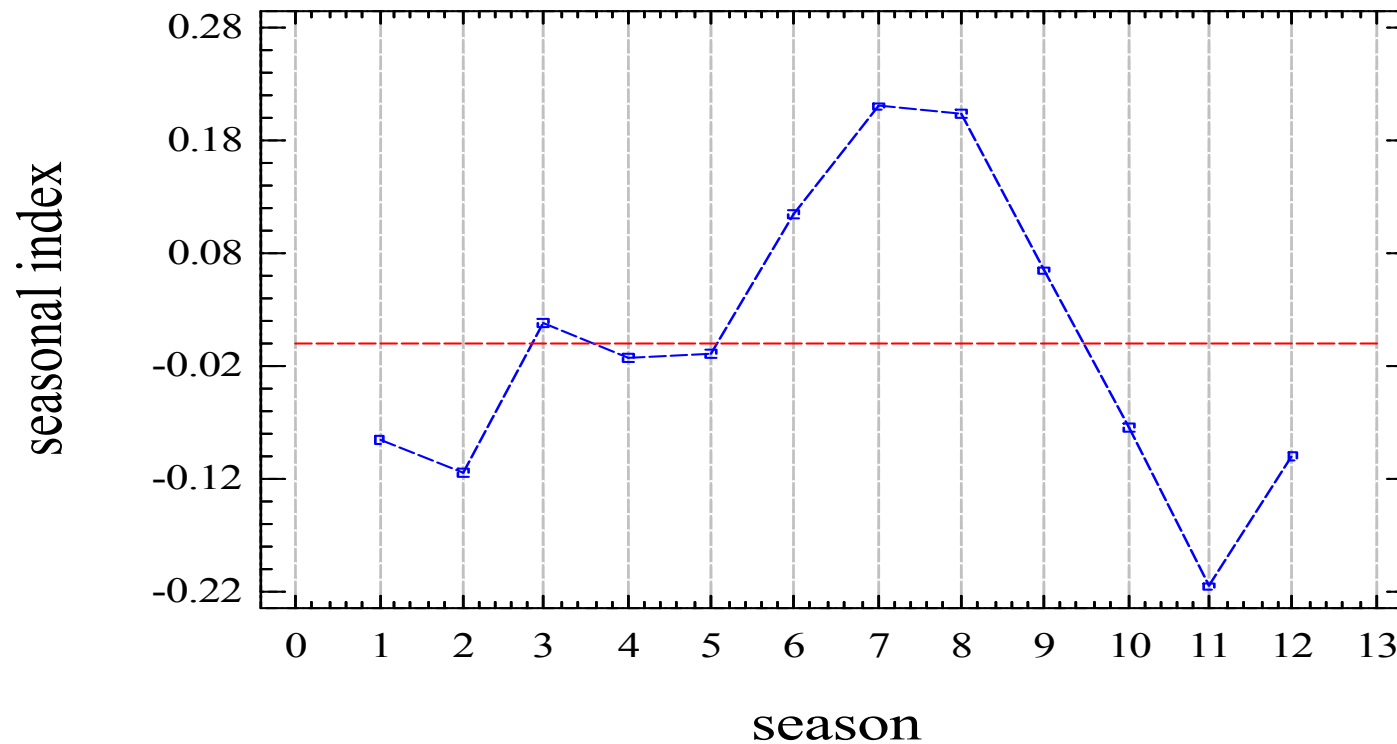
- ▶ Suponemos que el efecto estacional  $S_t$  satisface:

$$S_t = S_{t+12} = S_{t+24} = \dots$$

---

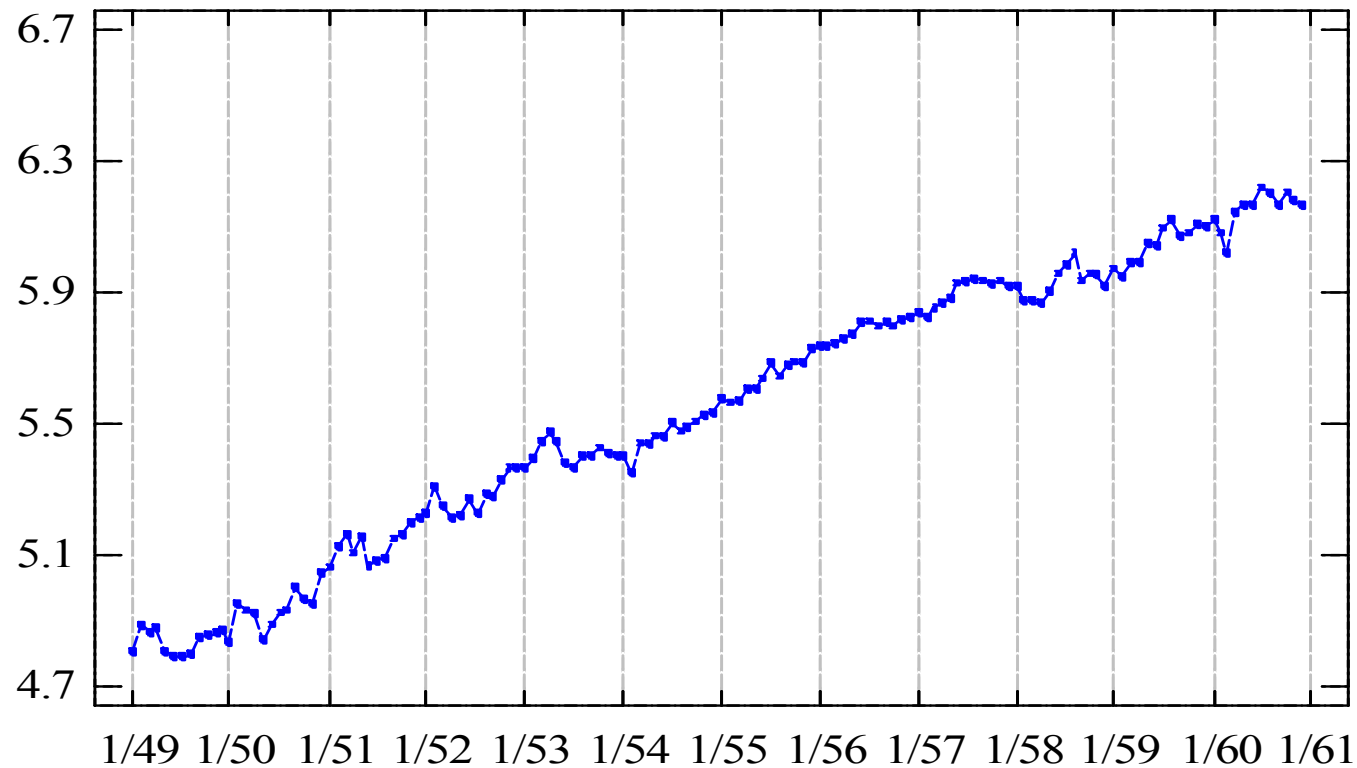
**Ejemplo 13.** *Volvemos al Ejemplo 6. El gráfico muestra los coeficientes estacionales.*

Seasonal Index Plot for log(No. de pasajeros)



---

**Ejemplo 13.** *Obtenemos la serie desestacionalizada,  $X_t - S_t$ :*  
Seasonally Adjusted Data Plot for log(No. de pasajeros)



► No muestra efectos estacionales.

---

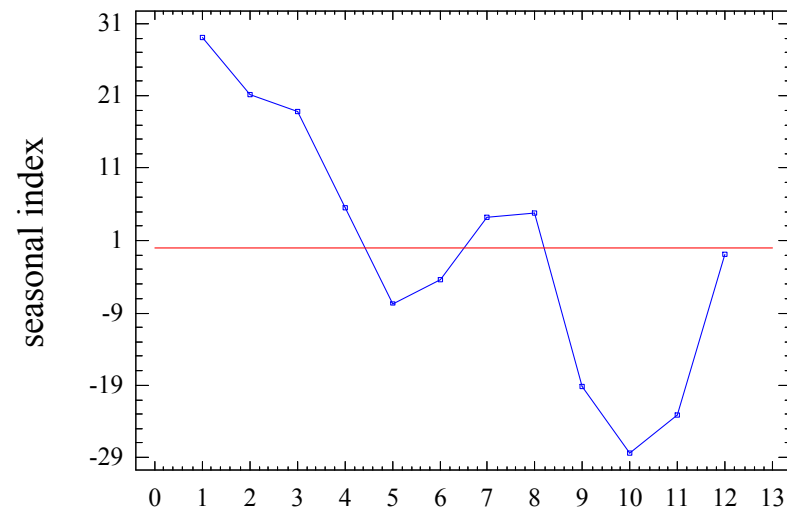
**Ejemplo 14.** *Obtener los coeficientes estacionales de la serie mensual de pluviómetros peninsulares (Fuente I.N.M.) para el período Octubre/1989 a Septiembre/2006 (Ejemplo 1).*

Seasonal Indices for Pluviometria

Seasonal decomposition method: Additiv

Season	Index
1	29.0565
2	21.1044
3	18.8623
4	5.59299
5	-7.70493
6	-4.37706
7	4.22346
8	4.78362
9	-19.1383
10	-28.394
11	-23.1034
12	-0.905707

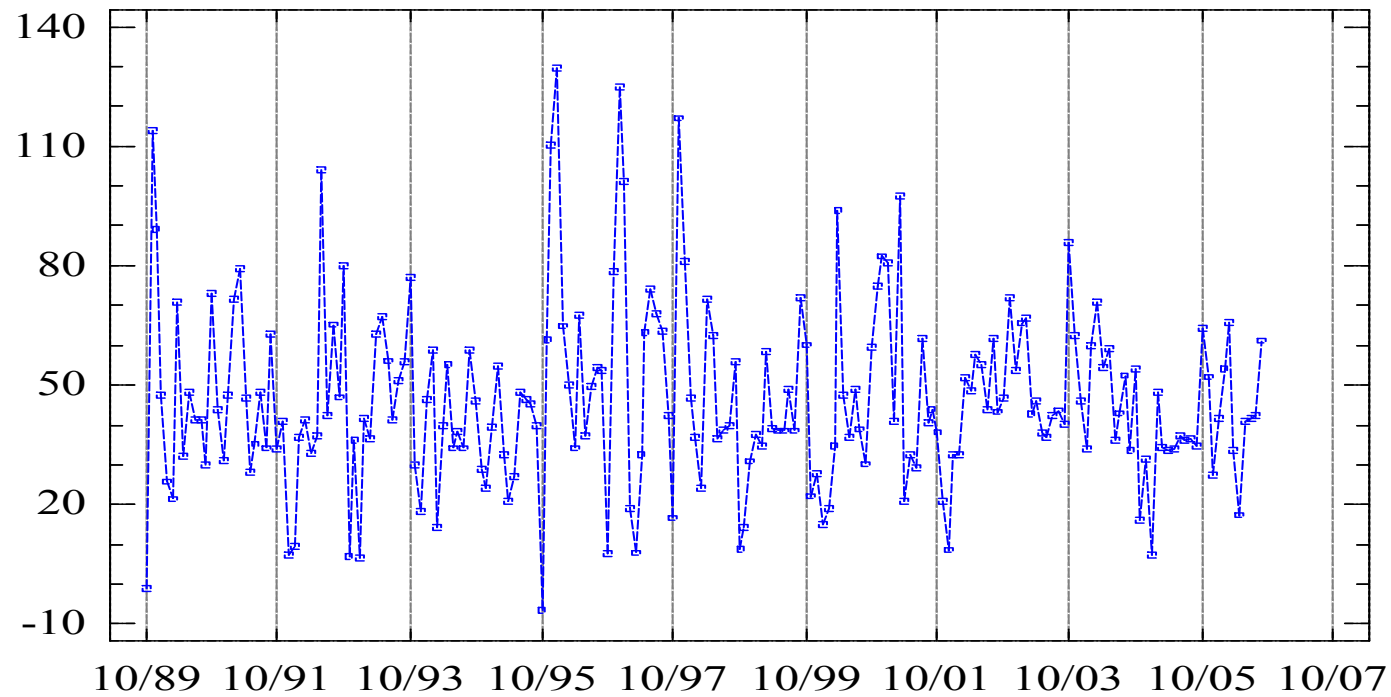
Seasonal Index Plot for Pluviometria



---

**Ejemplo 14.** *Obtenemos la serie desestacionalizada,  $X_t - S_t$ :*

Seasonally Adjusted Data Plot for Pluviometria



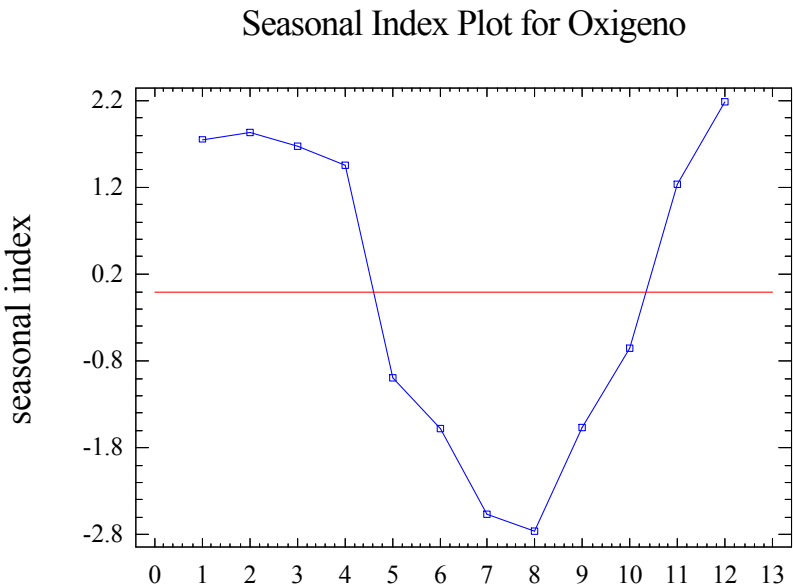
► No muestra efectos estacionales.

**Ejemplo 15.** *Obtener los coeficientes estacionales de la serie mensual de Oxígeno disuelto (ml/lit). Rio Santa Cruz (Washington, USA). (Elaboración propia a partir de <http://waterdata.usgs.gov>).*

**Seasonal Indices for Oxigeno**

**Seasonal decomposition method: Additiv**

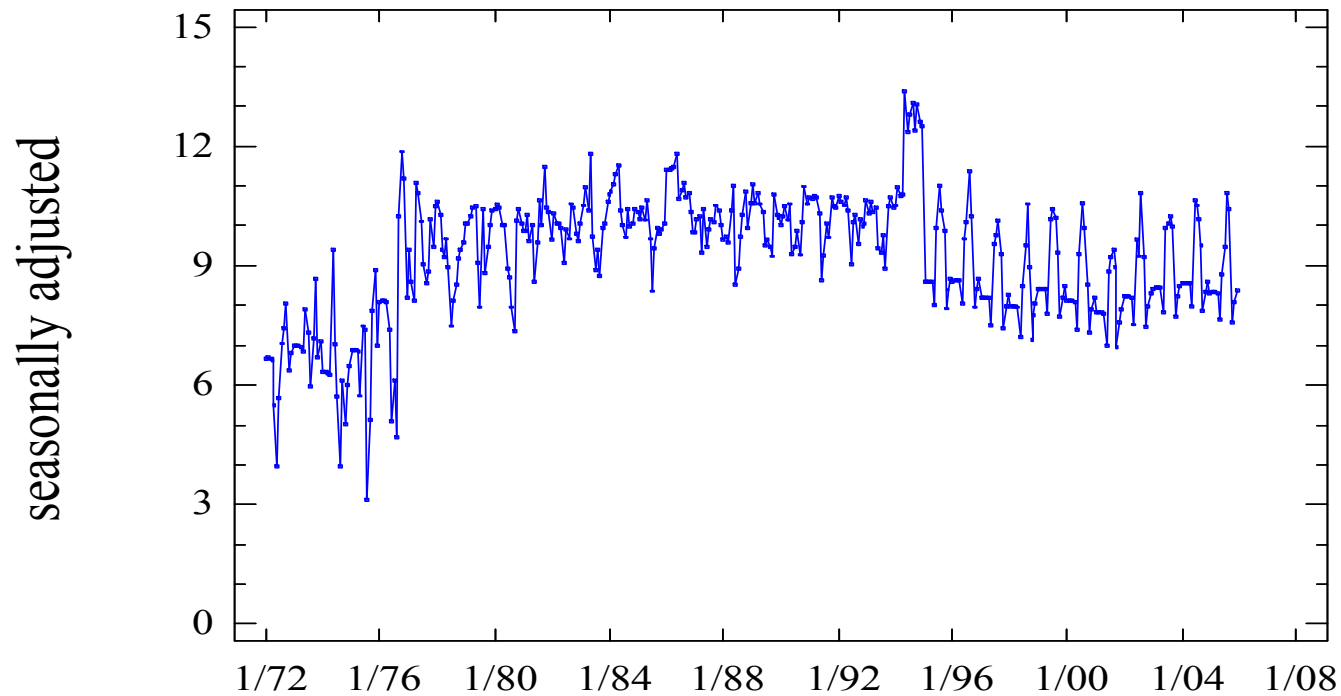
Season	Index
1	1.75095
2	1.82438
3	1.66915
4	1.45595
5	-0.989603
6	-1.57851
7	-2.56157
8	-2.76155
9	-1.56786
10	-0.657377
11	1.23205
12	2.184



---

**Ejemplo 15.** *Obtenemos la serie desestacionalizada,  $X_t - S_t$ :*

Seasonally Adjusted Data Plot for Oxigeno



► Todavía muestra efectos estacionales.

---

## Diferenciación estacional de la serie

- ▶ Es un método más general que consiste en no hacer ninguna hipótesis sobre la forma general de la estacionalidad a corto plazo y suponer simplemente que evoluciona lentamente en el tiempo.

Construimos una nueva serie:

$$y_t = x_t - x_{t-s}$$

que denominamos **serie diferenciada estacionalmente**.

- ▶ Diferenciar estacionalmente la serie equivale a suponer que la estacionalidad en  $t$  es el valor de serie en  $t - s$ :

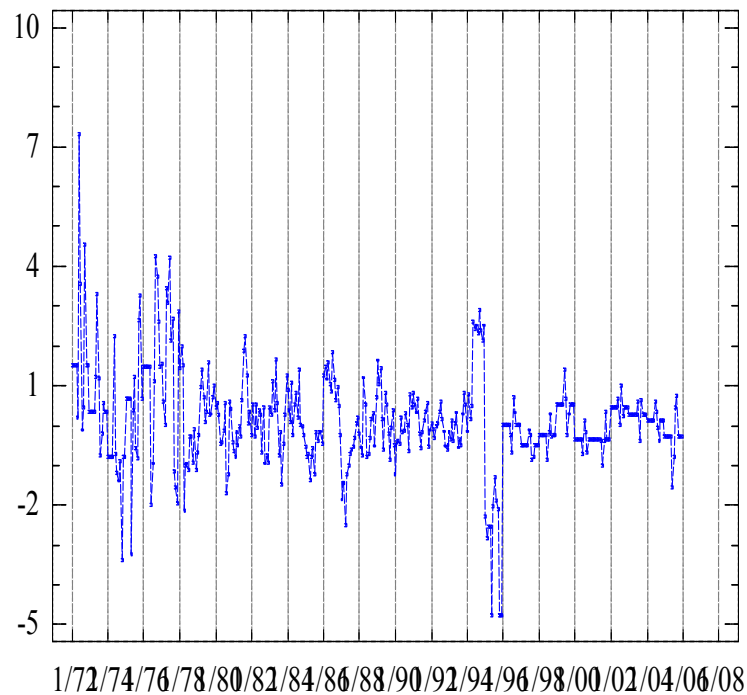
$$S_t = x_{t-s}.$$



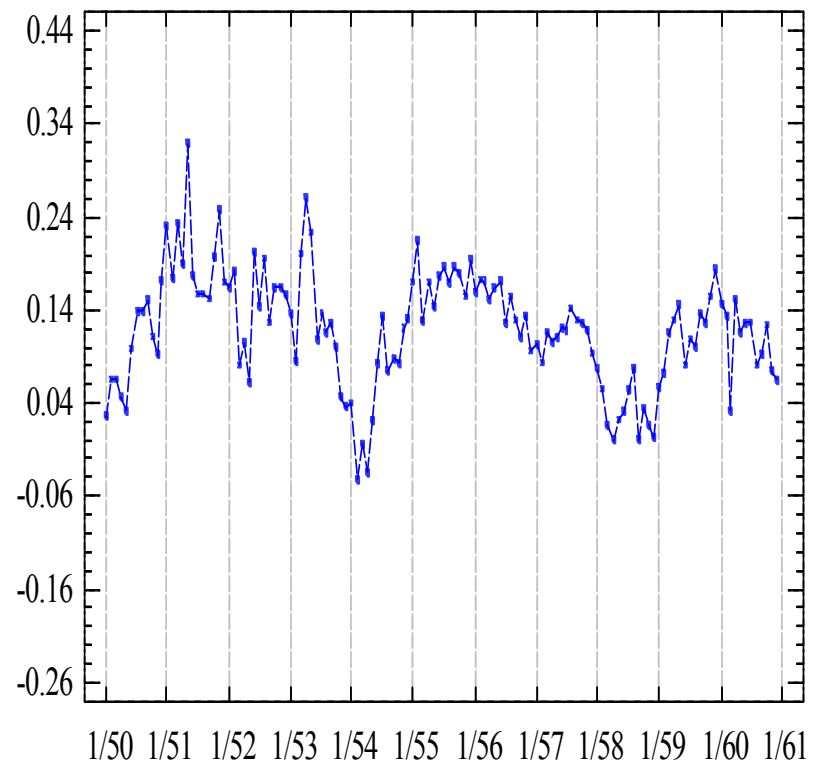
## Diferenciación estacional de la serie - Ejemplos

**Ejemplo 16.** *Obtener la serie desestacionalizada mediante diferenciación estacional para las series de los datos 15 y 6.*

Time Series Plot for SDIFF(Oxígeno, 12)



Time Series Plot for SDIFF(log(No. de pasajeros),12)

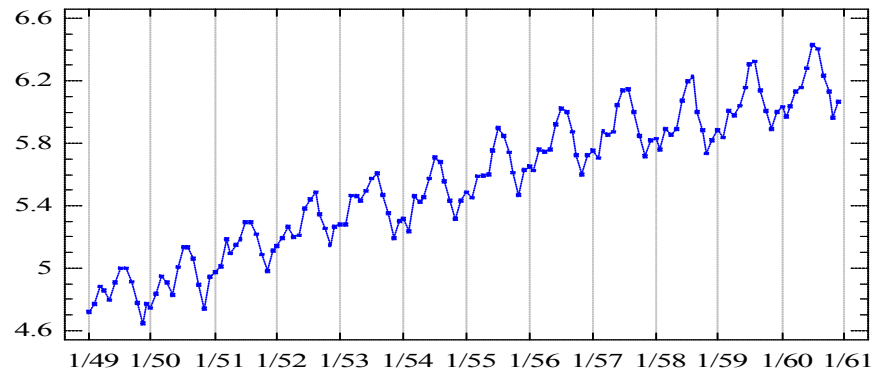


► En ambas no se observan efectos estacionales.

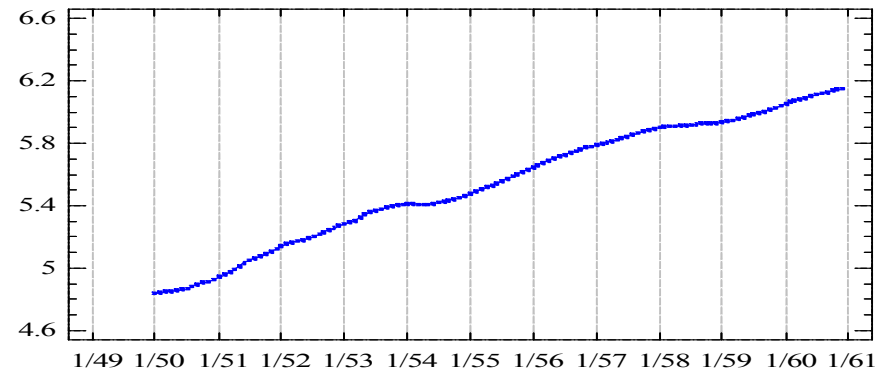
# Descomposición de la serie en componentes

**Ejemplo 17.** Con los datos del Ejemplo 6, obtenemos los siguientes gráficos:

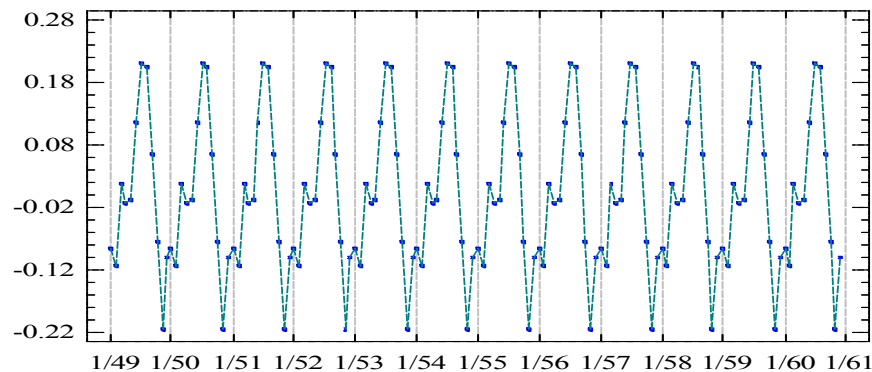
Time Series Plot for log(No. de pasajeros)



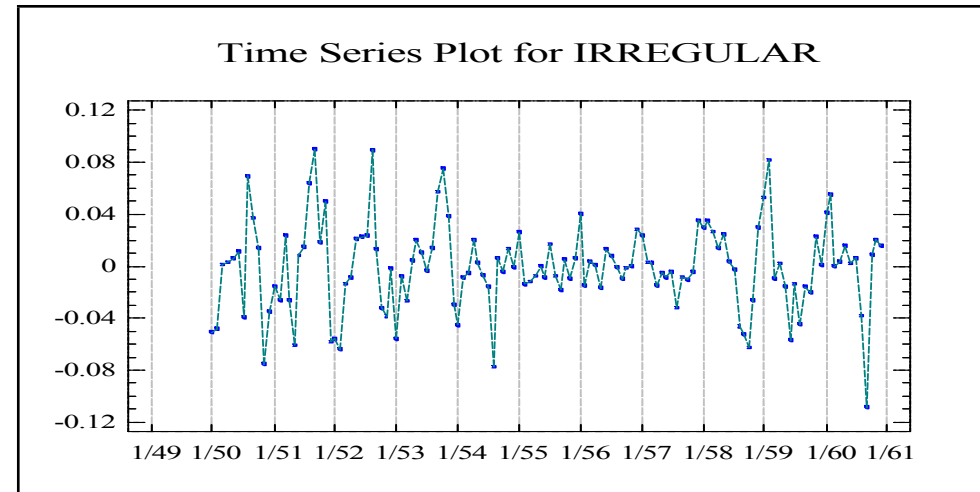
Time Series Plot for TREND



Time Series Plot for INDICES



Time Series Plot for IRREGULAR

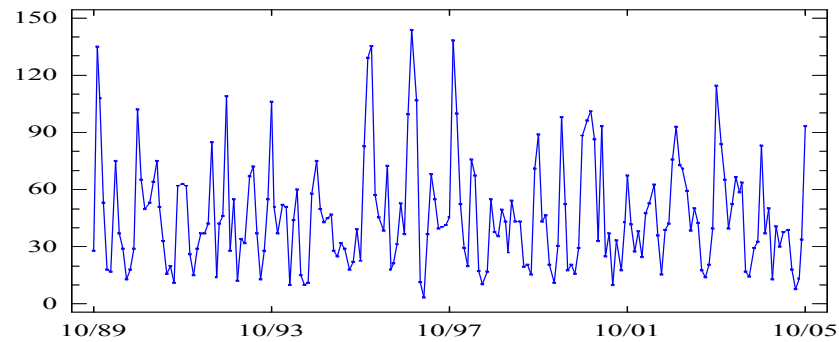


► La componente irregular parece aproximadamente estacionaria y sin patrones de tendencia o estacionalidad.

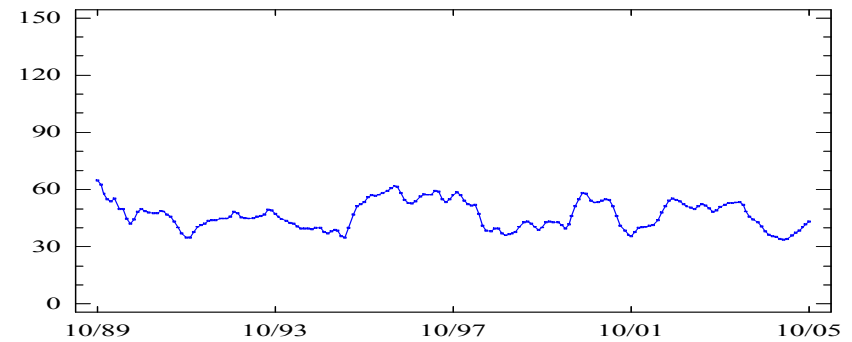
# Descomposición de la serie en componentes

**Ejemplo 18.** Con los datos del Ejemplo 1, obtenemos los siguientes gráficos:

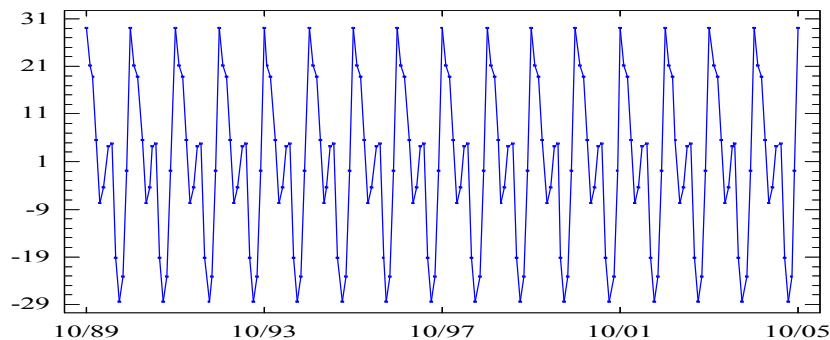
Time Series Plot for Pluviometria



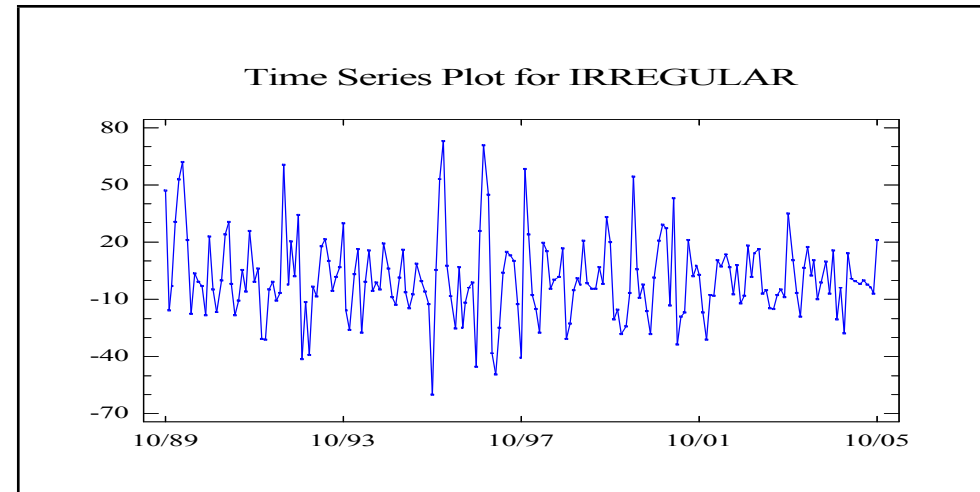
Time Series Plot for TREND



Time Series Plot for INDICES



Time Series Plot for IRREGULAR



► La componente irregular parece aproximadamente estacionaria y sin patrones de tendencia o estacionalidad.

---

## Predicción de una serie temporal

- Una vez que hemos obtenido la descomposición de la serie temporal:

$$X_t = T_t + S_t + I_t$$

- Podemos obtener predicciones de los valores futuros mediante los valores para  $t + 1, t + 2, \dots, t + h$  de las componentes  $T_t$  y  $S_t$ .

**Ejemplo 19.** Si  $T_t = a + bt$  y  $S_t$  se obtuvo mediante índices estacionales trimestrales, i.e., tenemos  $S_1, S_2, S_3$ , y  $S_4$ , entonces:

$$T_{t+1} = a + bt \quad y \quad S_{t+1} = \begin{cases} S_1 & \text{si } t + 1 = Q1 \\ S_2 & \text{si } t + 1 = Q2 \\ S_3 & \text{si } t + 1 = Q3 \\ S_4 & \text{si } t + 1 = Q4 \end{cases} .$$

*Las predicciones para  $t + 2, t + 3, \dots, t + h$  se obtienen de manera análoga.*

---

## Predicción de una serie temporal - Ejemplos

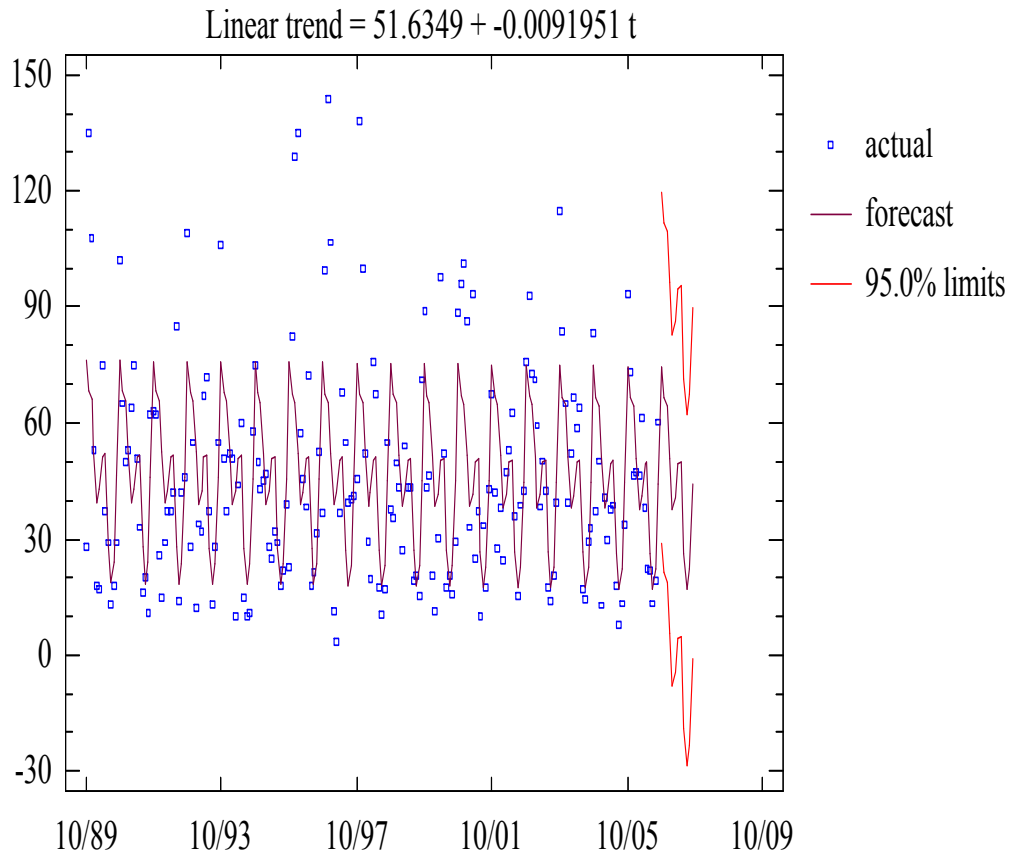
**Ejemplo 20.** Con los datos del *Ejemplo 1* obtenga las predicciones para el año hidrológico 2006/2007 con los siguientes procedimientos:

- *Tendencia lineal,  $T_t = a + bt$ , e índices estacionales.*
- *Medias móviles de orden 3,  $m_t = \frac{X_{t-3} + X_{t-2} + X_{t-1}}{3}$ , e índices estacionales.*
- *Indices estacionales.*
- *Diferencia estacional.*

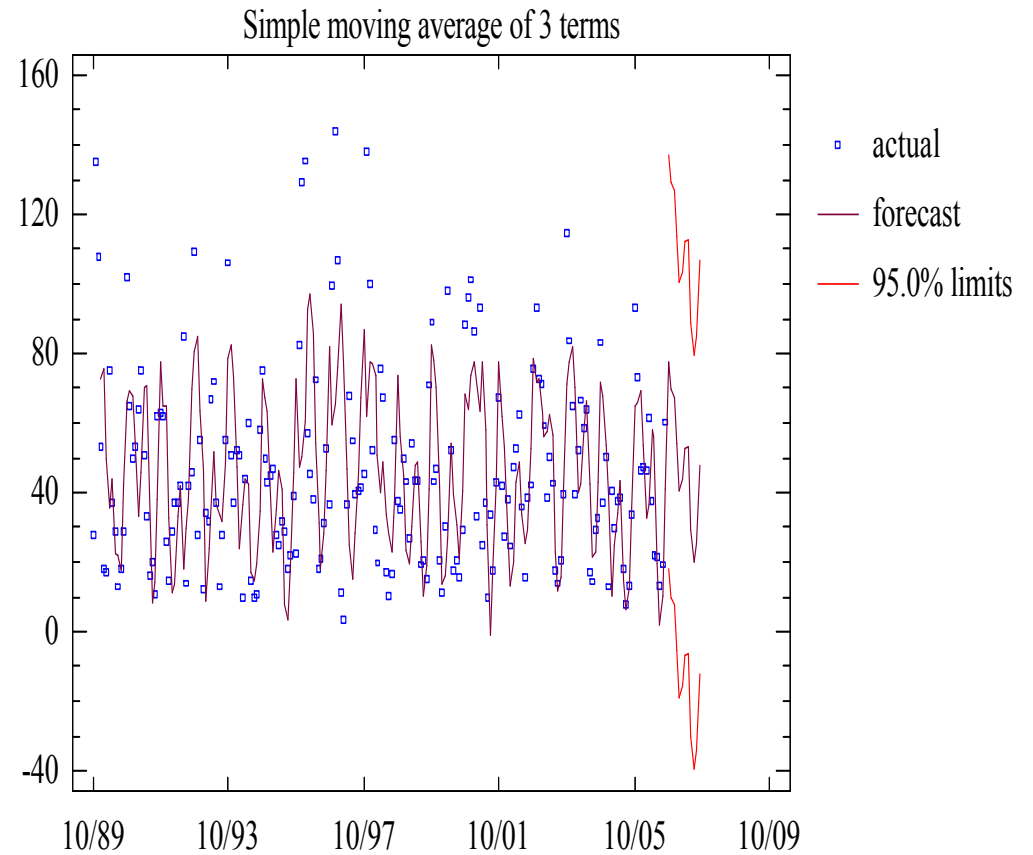
$$X_t = X_{t-1} - X_{t-12}.$$

# Predicción de una serie temporal - Ejemplos

## Time Sequence Plot for Pluviometria

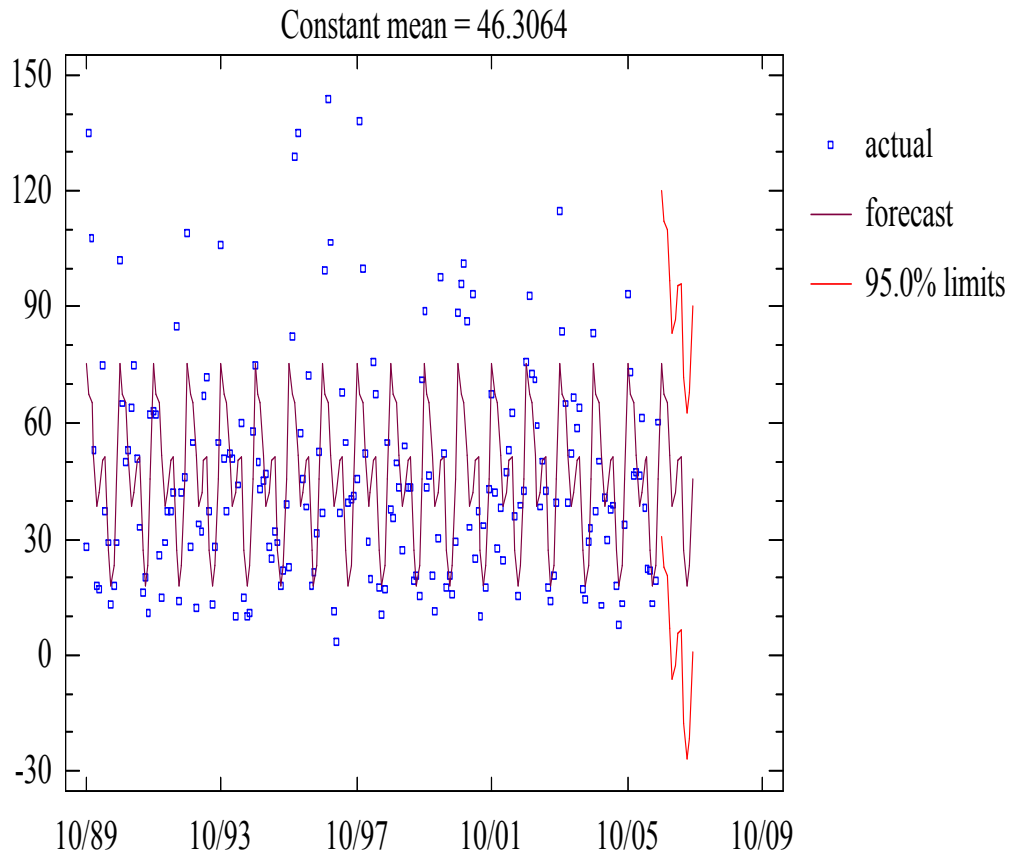


## Time Sequence Plot for Pluviometria

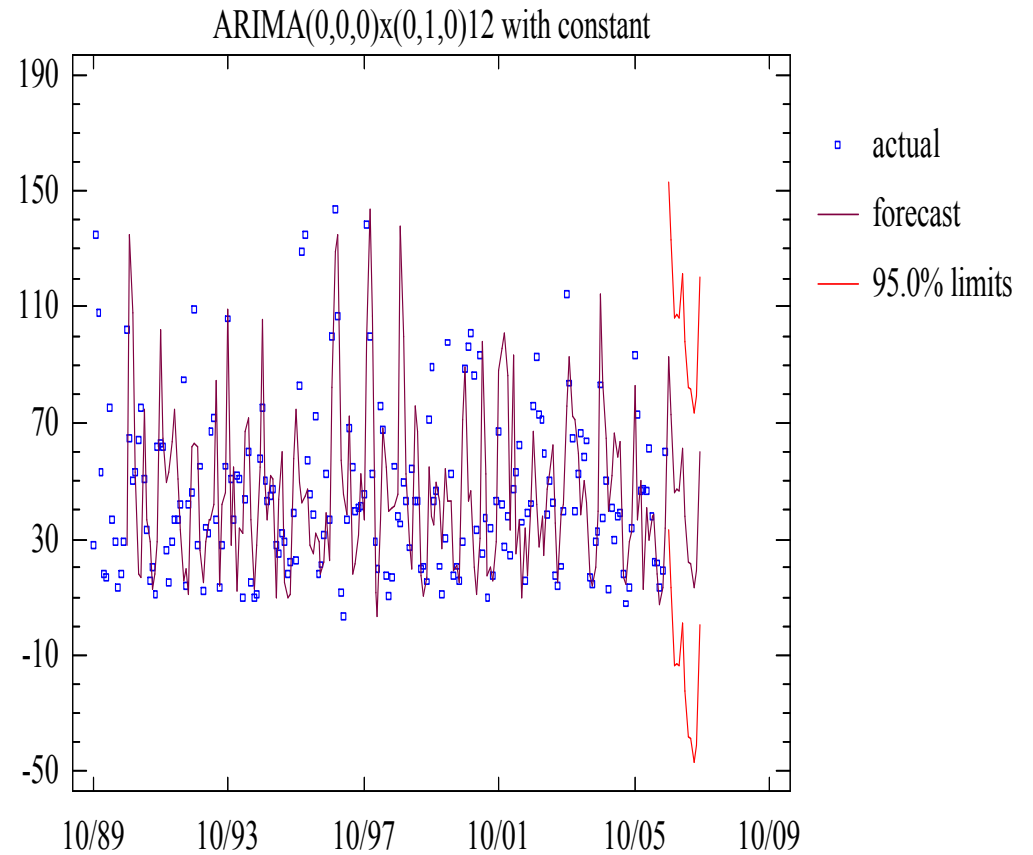


# Predicción de una serie temporal - Ejemplos

## Time Sequence Plot for Pluviometria



## Time Sequence Plot for Pluviometria



## Predicción de una serie temporal - Resultados

	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Observado
Octubre	74.42	77.46	75.36	93.11	85.3
Noviembre	66.46	69.51	67.41	73.01	89.9
Diciembre	64.21	67.26	65.17	46.21	45.2
Enero	50.93	53.99	51.90	47.21	33.9
Febrero	37.62	40.70	38.60	46.41	58.5
Marzo	40.94	44.02	41.93	61.31	50.3
Abril	49.53	52.62	50.53	37.81	64.9
Mayo	50.08	53.18	51.09	22.01	61
Junio	26.15	29.26	27.17	21.61	
Julio	16.89	20.01	17.91	13.21	
Agosto	22.17	25.30	23.20	19.21	
Septiembre	44.36	47.50	45.40	60.11	

	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4
Octubre	0.128	0.092	0.116	0.092
Noviembre	0.261	0.227	0.250	0.188
Diciembre	0.421	0.488	0.442	0.022
Enero	0.502	0.593	0.531	0.393
Febrero	0.357	0.304	0.340	0.207
Marzo	0.186	0.125	0.166	0.219
Abril	0.237	0.189	0.221	0.417
Mayo	0.179	0.128	0.162	0.639

Media	0.284	0.268	0.279	0.272
S.D.	0.131	0.183	0.147	0.200
ECM	0.098	0.105	0.099	0.114



---

# Otra alternativa para la predicción de una serie temporal

## Alisados Exponenciales

- Se emplean fundamentalmente para predecir nuevos valores de la serie.
- Se basan en modelos paramétricos deterministas que se ajustan a la evolución de la serie.
- Las observaciones más recientes tienen más peso en la predicción que las más alejadas.
- Se resuelven por métodos recursivos.
- Pueden ser poco realistas para explicar la evolución de la serie.

- 
- **Alisado exponencial simple**, se emplea para series sin tendencia ni estacionalidad:

$$\hat{X}_T = \alpha X_T + (1 - \alpha) \hat{X}_{T-1},$$
$$\hat{X}_T = \alpha \sum_{t=0}^{T-1} (1 - \alpha)^t X_{T-t},$$
$$\hat{X}_{T+k} = \hat{X}_T, \text{ para todo } k.$$

- **Alisado exponencial lineal de Holt**: se emplea para series con tendencia lineal y sin estacionalidad:

$$\hat{X}_T = \alpha X_T + (1 - \alpha)(\hat{X}_{T-1} + B_{T-1}),$$

$$\hat{b}_T = \beta(\hat{X}_T - \hat{X}_{T-1}) + (1 - \beta)B_{T-1},$$

$$\hat{X}_{T+k} = \hat{X}_T + B_T k,$$

$$\text{con } \hat{X}_1 = X_1, \hat{X}_2 = X_2, B_1 = 0 \text{ y } B_2 = X_2 - X_1.$$

- 
- **Alisado exponencial estacional de Holt-Winters:** se emplea para series con tendencia y estacionalidad.

$$\hat{X}_T = \alpha \frac{X_T}{S_{t-s}} + (1 - \alpha)(\hat{X}_{T-1} + B_{T-1}),$$

$$\hat{b}_T = \beta(\hat{X}_T - \hat{X}_{T-1}) + (1 - \beta)B_{T-1},$$

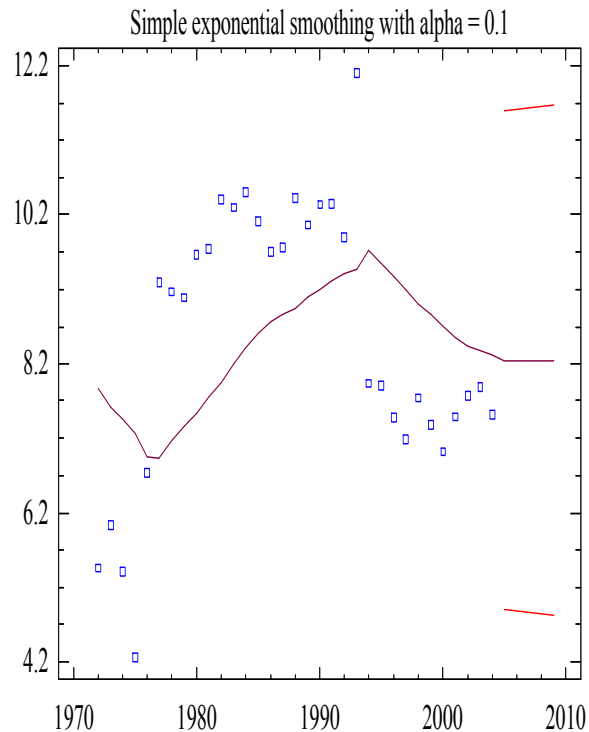
$$\hat{S}_T = \delta \frac{X_T}{\hat{X}_T} + (1 - \delta)S_{T-s},$$

$$\hat{X}_{T+k} = (\hat{X}_T + B_T k) S_{T-s+k}.$$

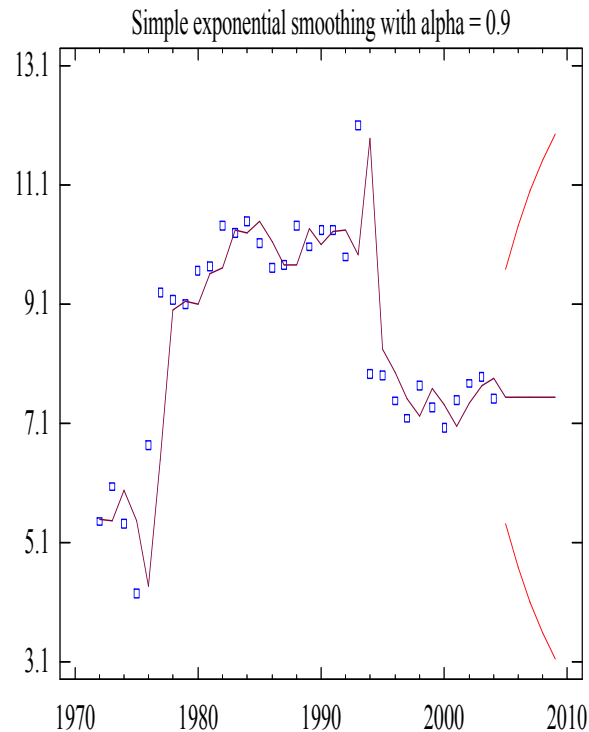
- El factor estacional no es constante como en los índices estacionales.

# Alisado exponencial - Efecto y selección de los pesos

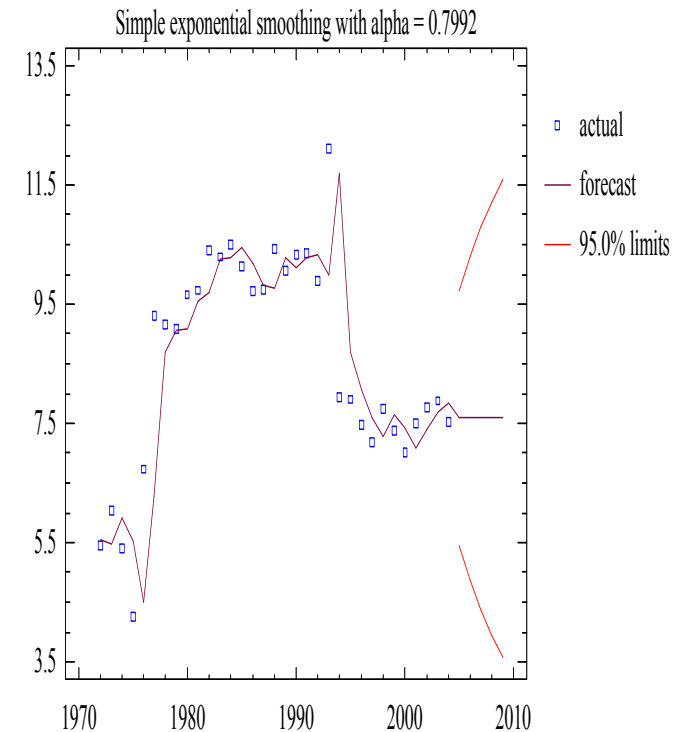
Time Sequence Plot for Oxigeno disuelto



Time Sequence Plot for Oxigeno disuelto



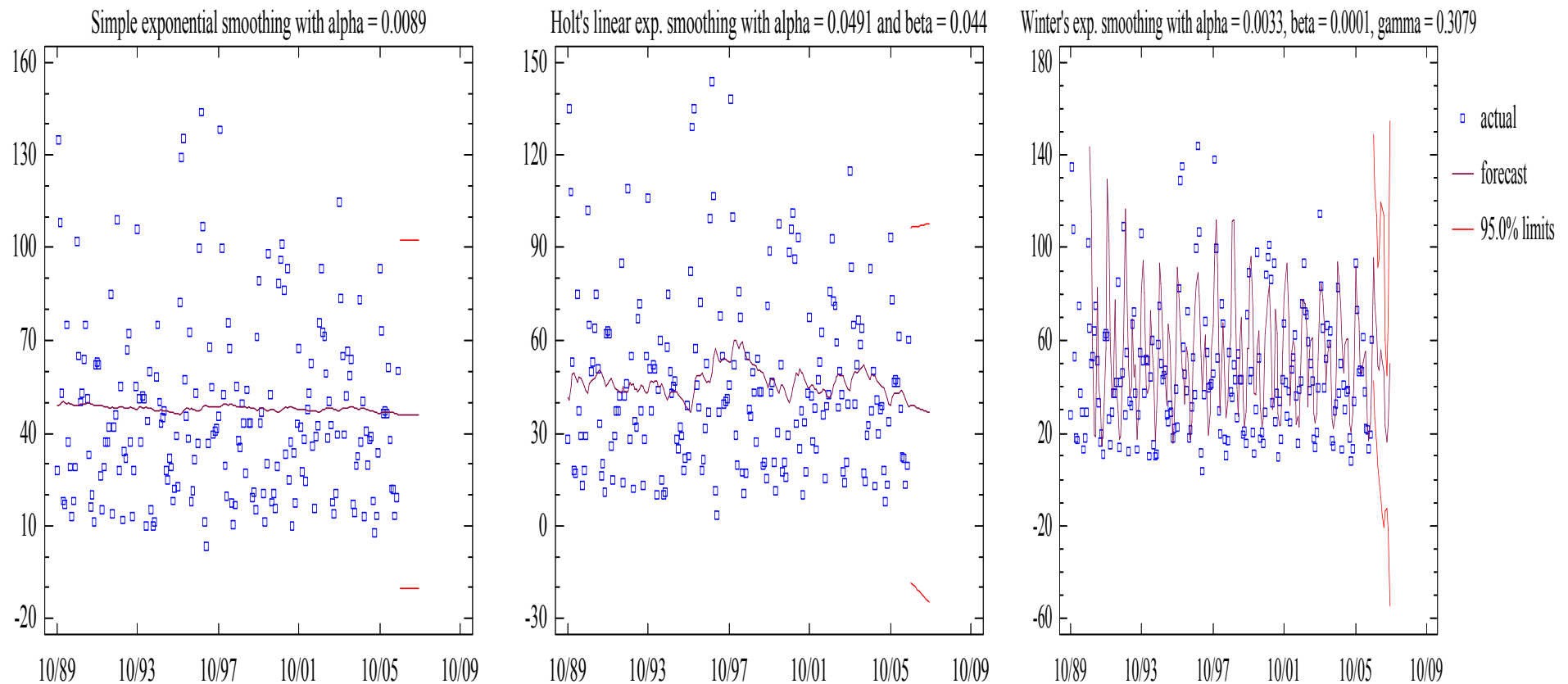
Time Sequence Plot for Oxigeno disuelto



- Los pesos determinan el peso que damos a las componentes de la predicción, un peso cercano a la unidad le asigna más peso a las observaciones recientes.

## Predicción de una serie temporal - Ejemplos

**Ejemplo 21.** Con los datos del *Ejemplo 1* obtenga las predicciones para el año hidrológico 2006/2007 utilizando los métodos de alisados simple, de Holt y de Holt–Winters.



## Predicción de una serie temporal - Resultados

	Modelo 1	Alisado 1	Alisado 2	Alisado 3	Observado
Octubre	74.42	46.01	39.98	97.54	85.3
Noviembre	66.46	46.01	39.82	71.98	89.9
Diciembre	64.21	46.01	39.66	58.19	45.2
Enero	50.93	46.01	39.50	43.86	33.9
Febrero	37.62	46.01	39.35	48.38	58.5
Marzo	40.94	46.01	39.19	56.09	50.3
Abril	49.53	46.01	39.03	47.15	64.9
Mayo	50.08	46.01	38.87	40.58	61
Junio	26.15	46.01	38.72	21.87	
Julio	16.89	46.01	38.56	14.26	
Agosto	22.17	46.01	38.40	21.94	
Septiembre	44.36	46.01	38.24	50.16	

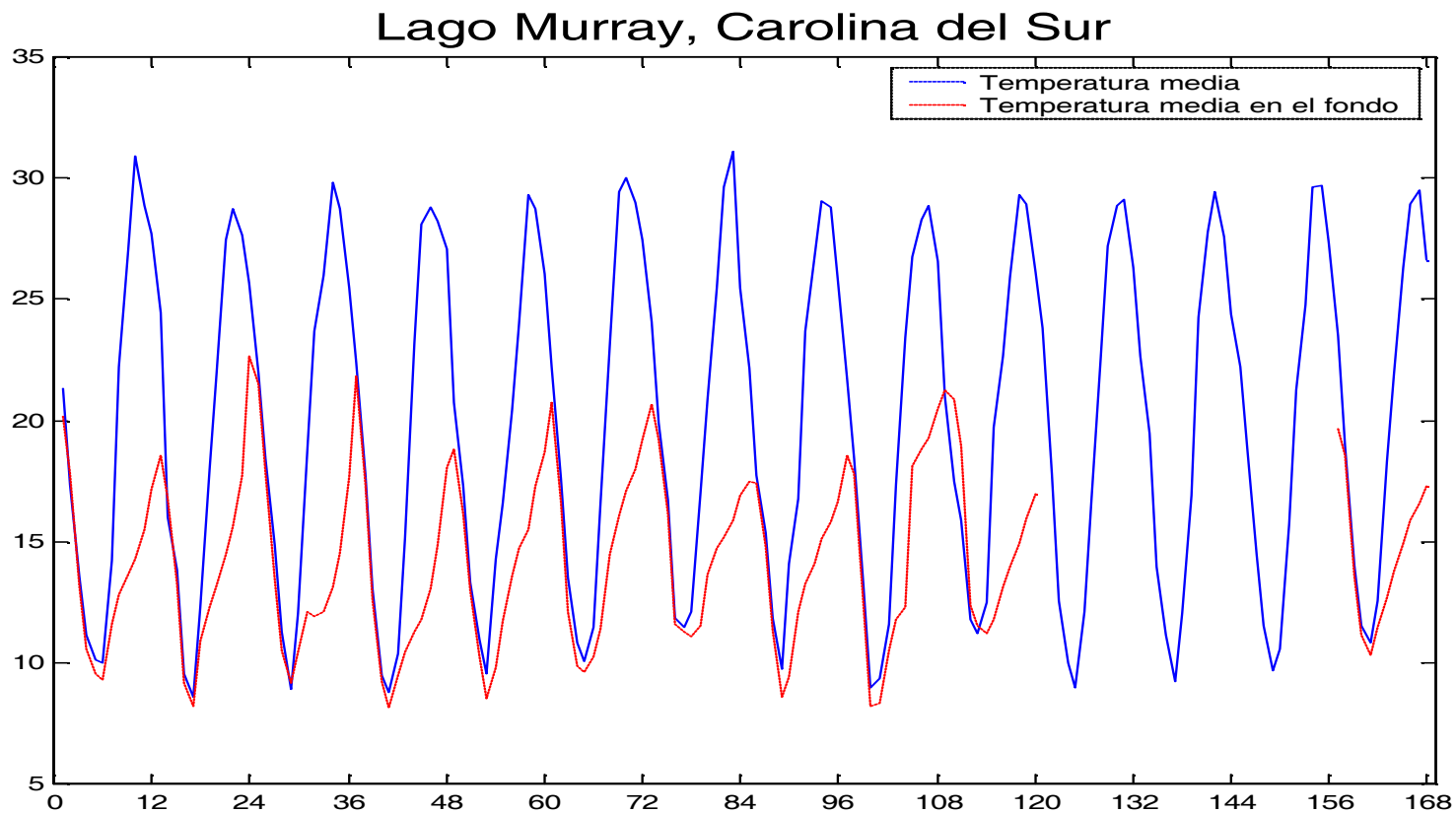
	Modelo 1	Alisado 1	Alisado 2	Alisado 3
Octubre	0.128	0.461	0.531	0.144
Noviembre	0.261	0.488	0.557	0.199
Diciembre	0.421	0.018	0.123	0.287
Enero	0.502	0.357	0.165	0.294
Febrero	0.357	0.213	0.327	0.173
Marzo	0.186	0.085	0.221	0.115
Abril	0.237	0.291	0.399	0.273
Mayo	0.179	0.246	0.363	0.335

Media	0.284	0.270	0.336	0.228
S.D.	0.131	0.166	0.160	0.080
ECM	0.098	0.101	0.138	0.058

---

## Ejemplo con datos faltantes

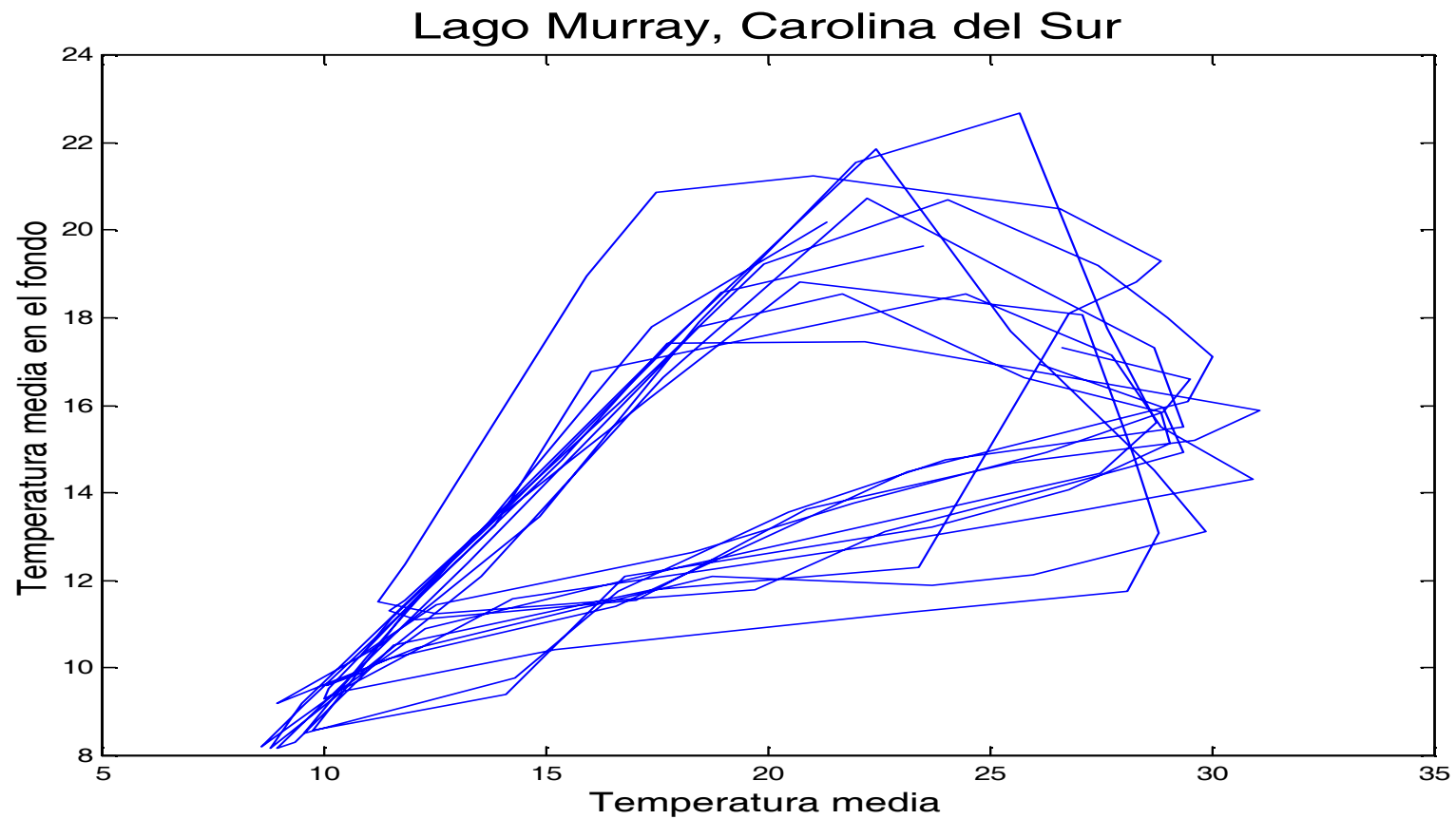
**Ejemplo 22.** *Temperatura media en la superficie y en el fondo en Lago Murray - Carolina del Sur, Octubre/1992 a Septiembre/2006.*



---

## Ejemplo con datos faltantes

¿Podemos “predecir” la temperatura del fondo?





# Interpolación de los datos faltantes

La relación entre Temperatura y Temperatura en el fondo es no lineal

## Multiple Regression Analysis

-----  
Dependent variable: Temperatura Fondo  
-----

Parameter	Estimate	Standard Error	T Statistic	P-Value
CONSTANT	3.6386	1.22333	2.97435	0.0035
Temperatura	0.982518	0.144872	6.78196	0.0000
Mes	-1.21715	0.155993	-7.80261	0.0000
Temperatura^2	-0.0363928	0.00396844	-9.17058	0.0000
Temperatura*Mes	0.10833	0.0092613	11.697	0.0000

## Analysis of Variance

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Model	1446.01	4	361.502	208.78	0.0000
Residual	219.905	127	1.73154		
Total (Corr.)	1665.91	131			

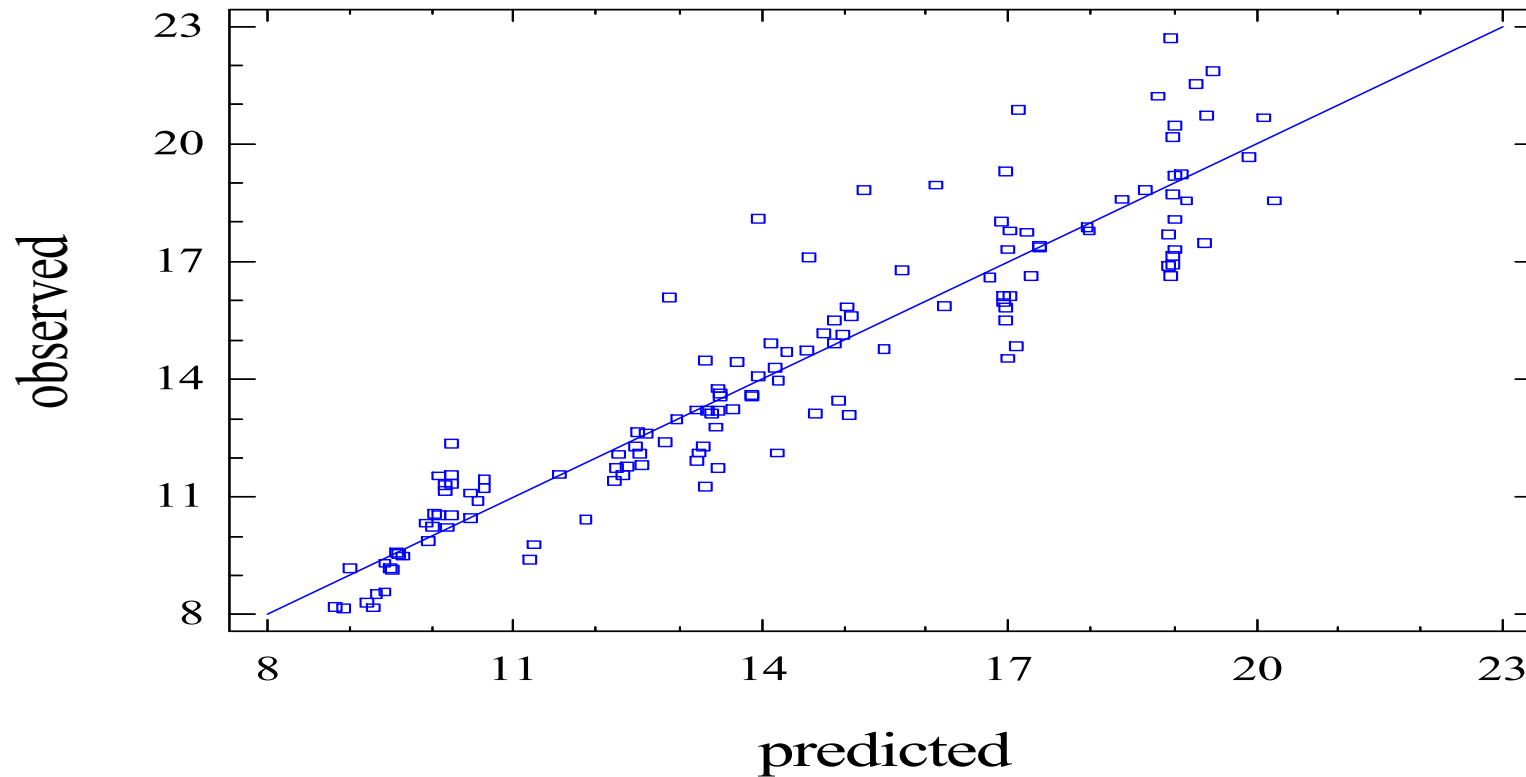
R-squared = 86.7997 percent

R-squared (adjusted for d.f.) = 86.384 percent

---

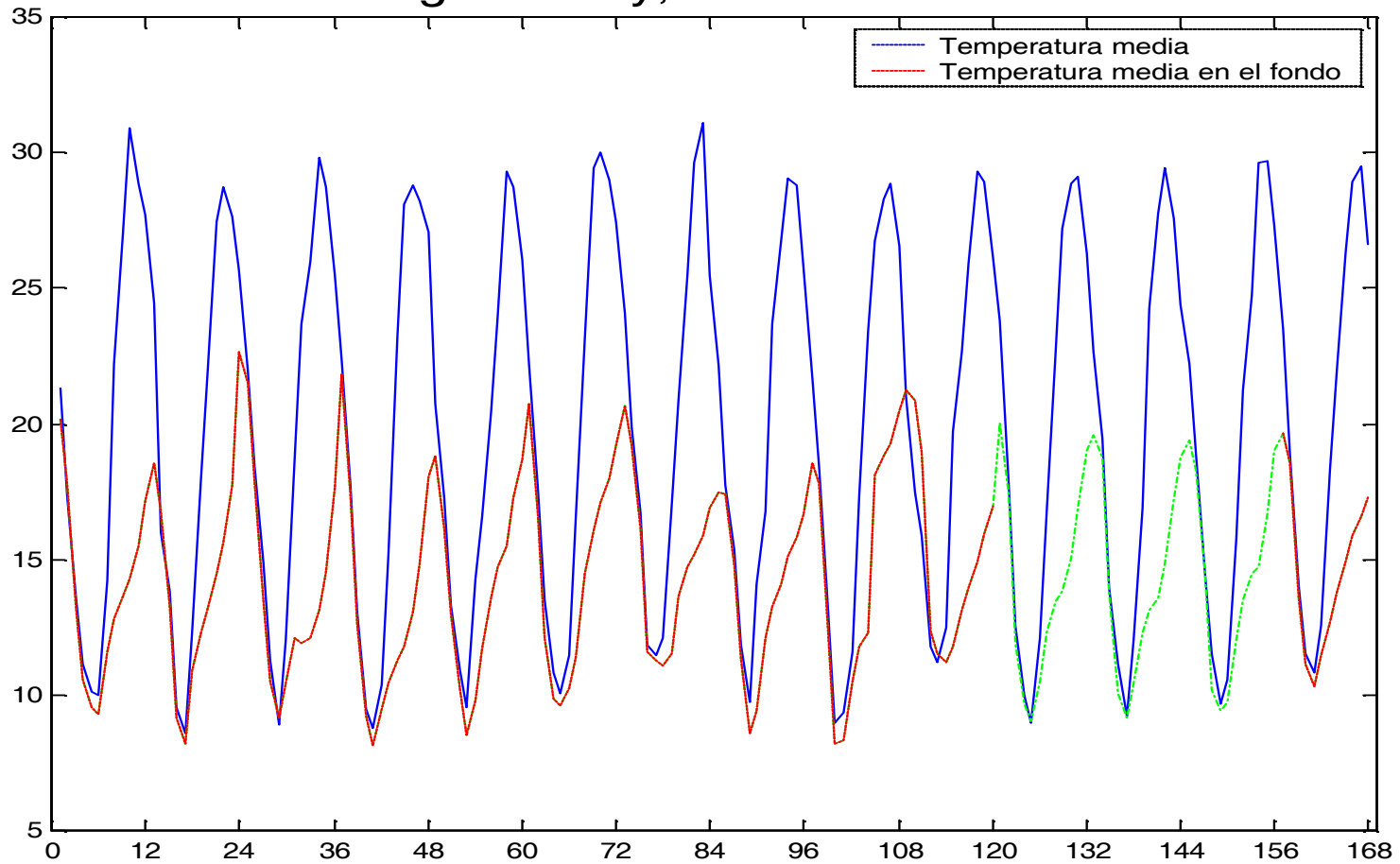
# Interpolación de los datos faltantes

Plot of Temperatura Fondo



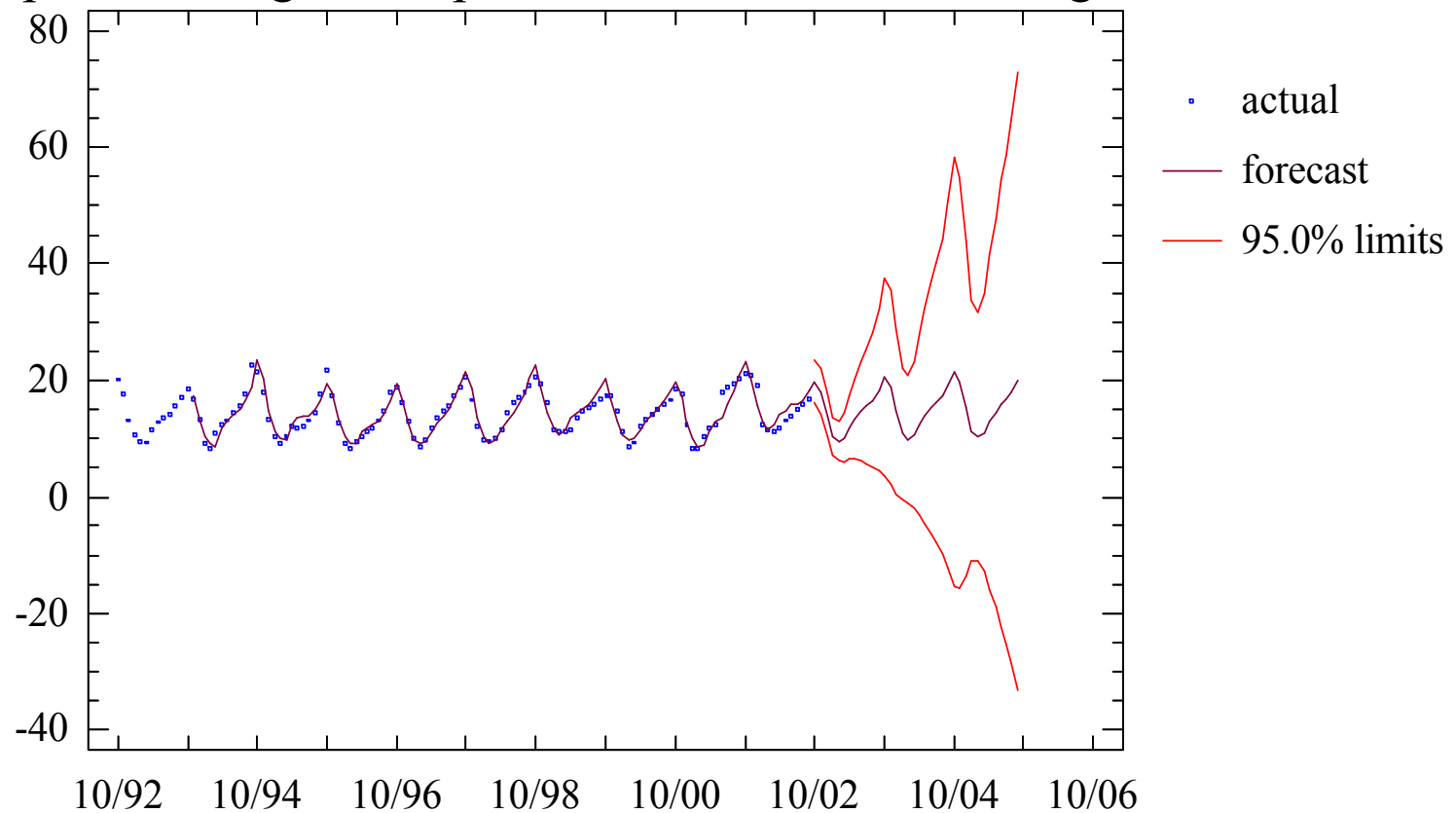
# Interpolación de los datos faltantes

Lago Murray, Carolina del Sur

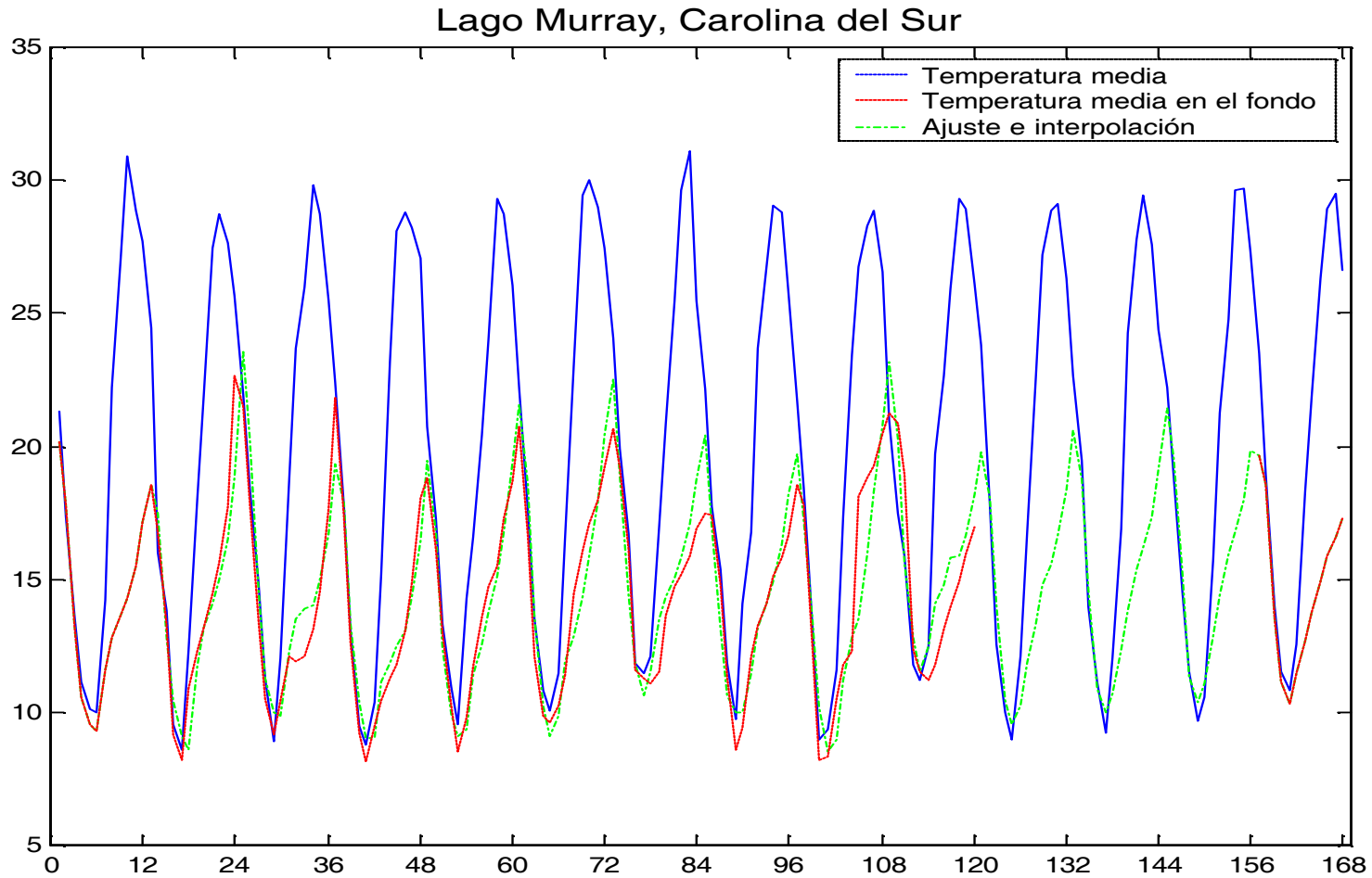


# Interpolación - Una alternativa basada en series temporales

Winter's exp. smoothing with  $\alpha = 0.3343$ ,  $\beta = 0.0001$ ,  $\gamma = 0.1693$

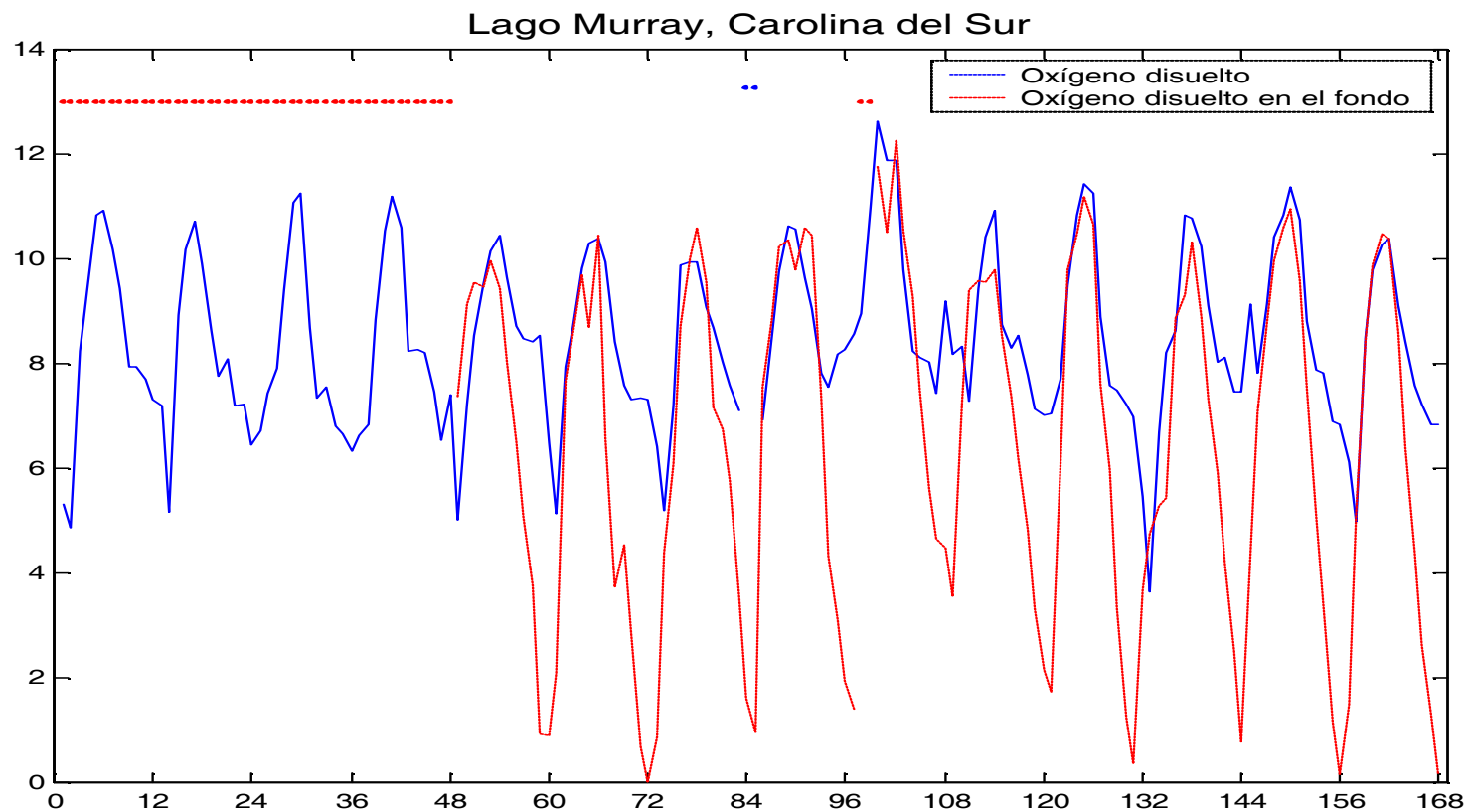


# Interpolación - Una alternativa basada en series temporales



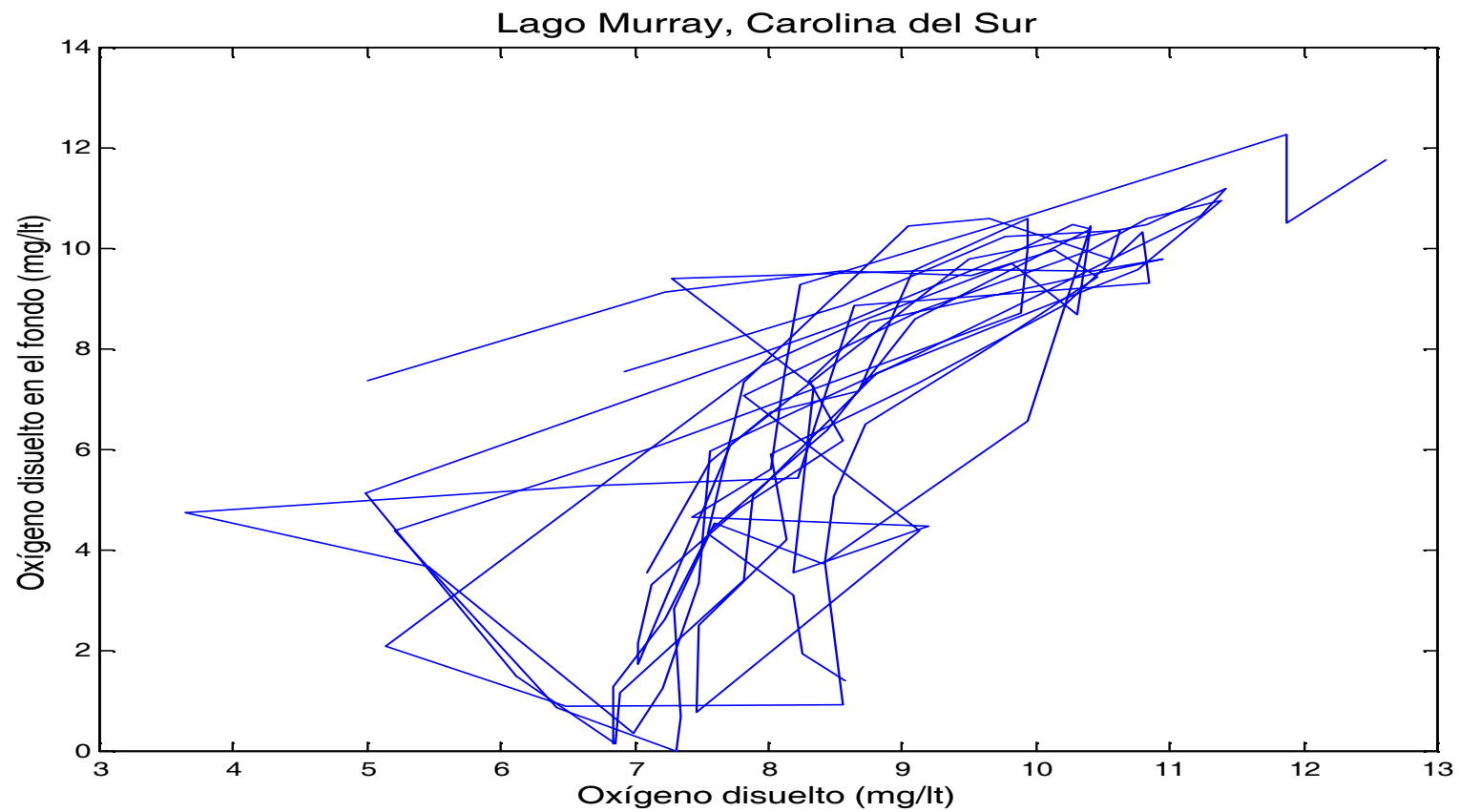
## Ejemplo con datos faltantes

**Ejemplo 23.** *Oxígeno disuelto media en la superficie y en el fondo en Lago Murray - Carolina del Sur, Octubre/1992 a Septiembre/2006.*



## Ejemplo con datos faltantes

¿Podemos “predecir” los datos faltantes?



---

# Interpolación de los datos faltantes

¿Podemos “predecir” los datos faltantes?

## Multiple Regression Analysis

-----  
Dependent variable: Oxigeno Fondo  
-----

Parameter	Estimate	Standard Error	T Statistic	P-Value
CONSTANT	6.29991	10.4769	0.601317	0.5492
Oxigeno	0.830319	1.67511	0.495681	0.6214
Oxigeno^2	-0.106926	0.0698998	-1.52971	0.1297
Mes	-0.483242	1.01006	-0.478427	0.6335
Oxigeno*Mes	0.0205182	0.110638	0.185454	0.8533

-----  
R-squared = 8.5047 percent

R-squared (adjusted for d.f.) = 4.29802 percent

## Multiple Regression Analysis

-----  
Dependent variable: Oxigeno Fondo  
-----

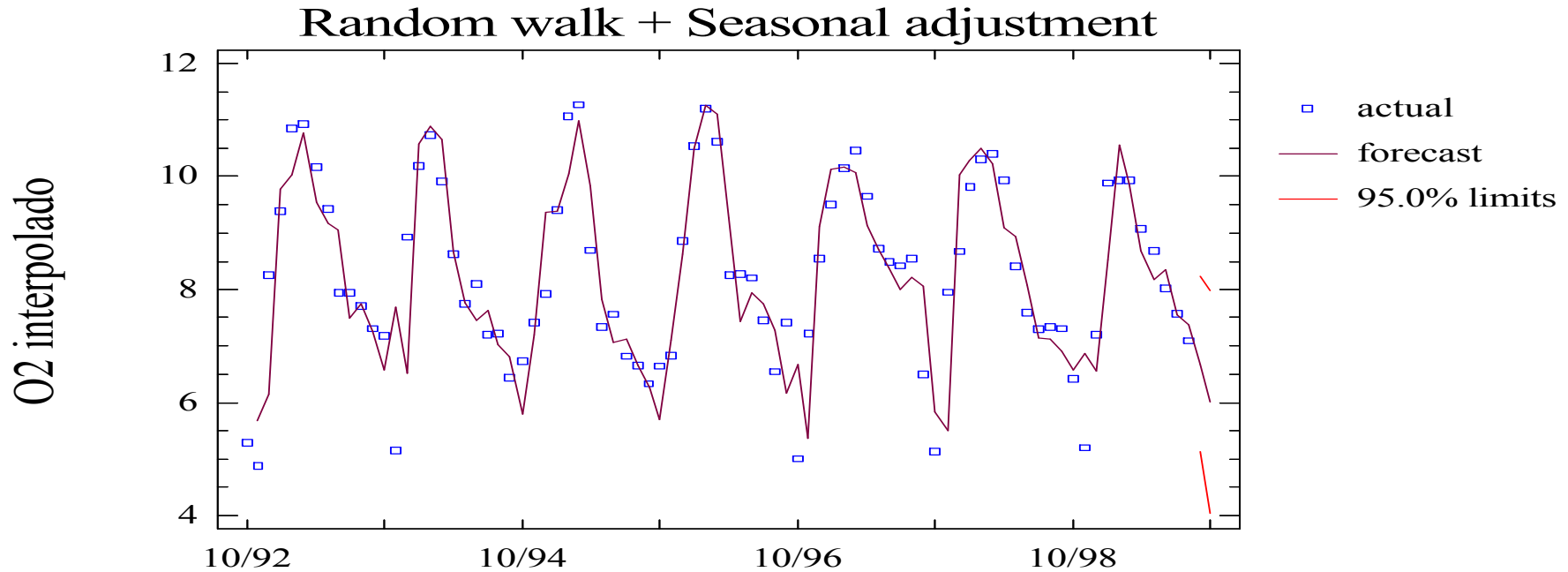
Parameter	Estimate	Standard Error	T Statistic	P-Value
CONSTANT	-9.22845	8.81297	-1.04714	0.2979
Oxigeno	0.882918	0.893172	0.98852	0.3256
Temperatura	0.509903	0.388381	1.31289	0.1926
Oxigeno*Temperatu	-0.0330939	0.0419215	-0.789424	0.4320

-----  
R-squared = 9.61981 percent

R-squared (adjusted for d.f.) = 6.53866 percent

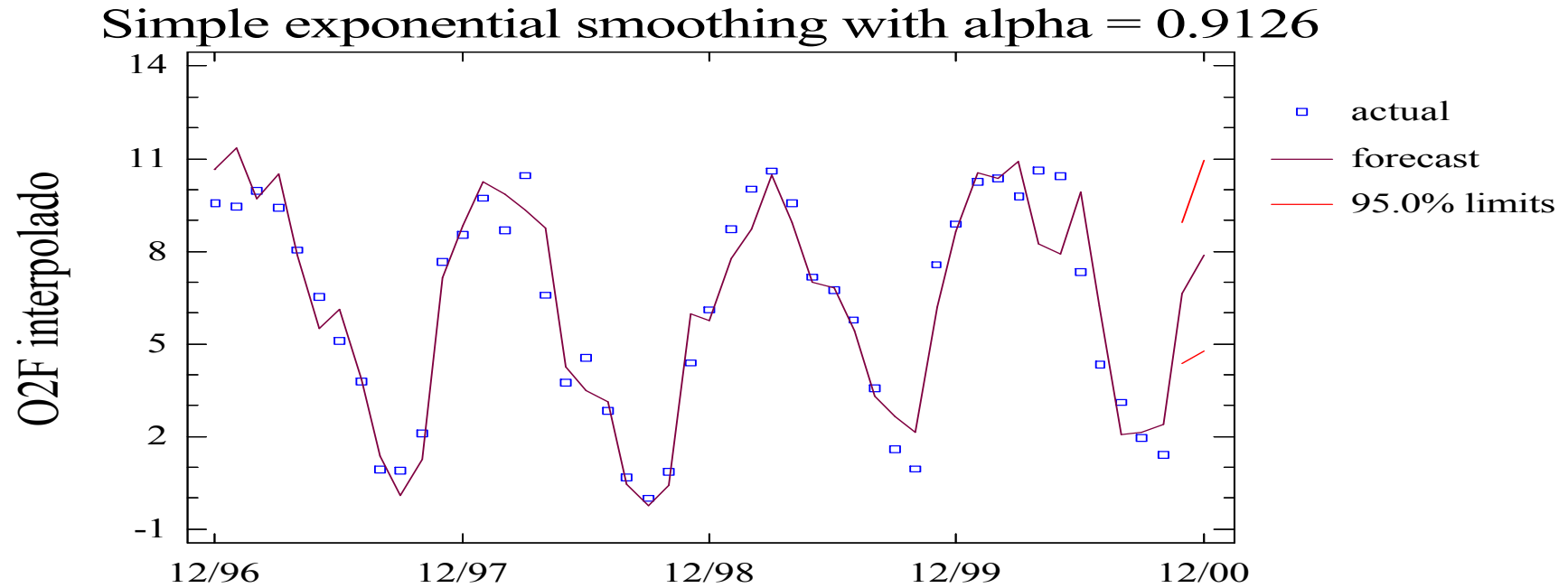


# Interpolación - Una respuesta basada en series temporales



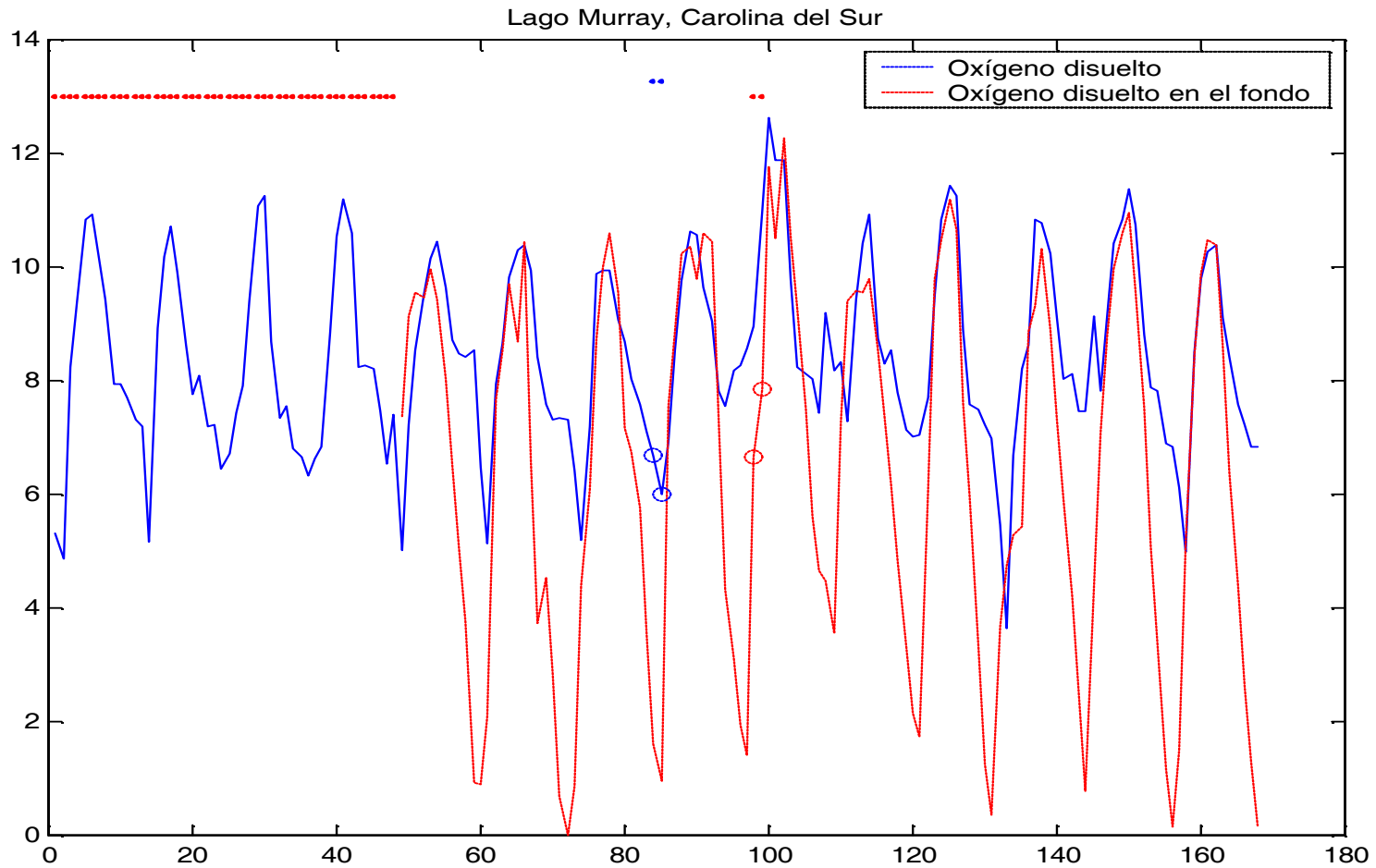
Period	Forecast	Lower 95.0% Limit	Upper 95.0% Limit
9/99	6.67861	5.13383	8.22338
10/99	6.0107	4.04454	7.97686

# Interpolación - Una respuesta basada en series temporales



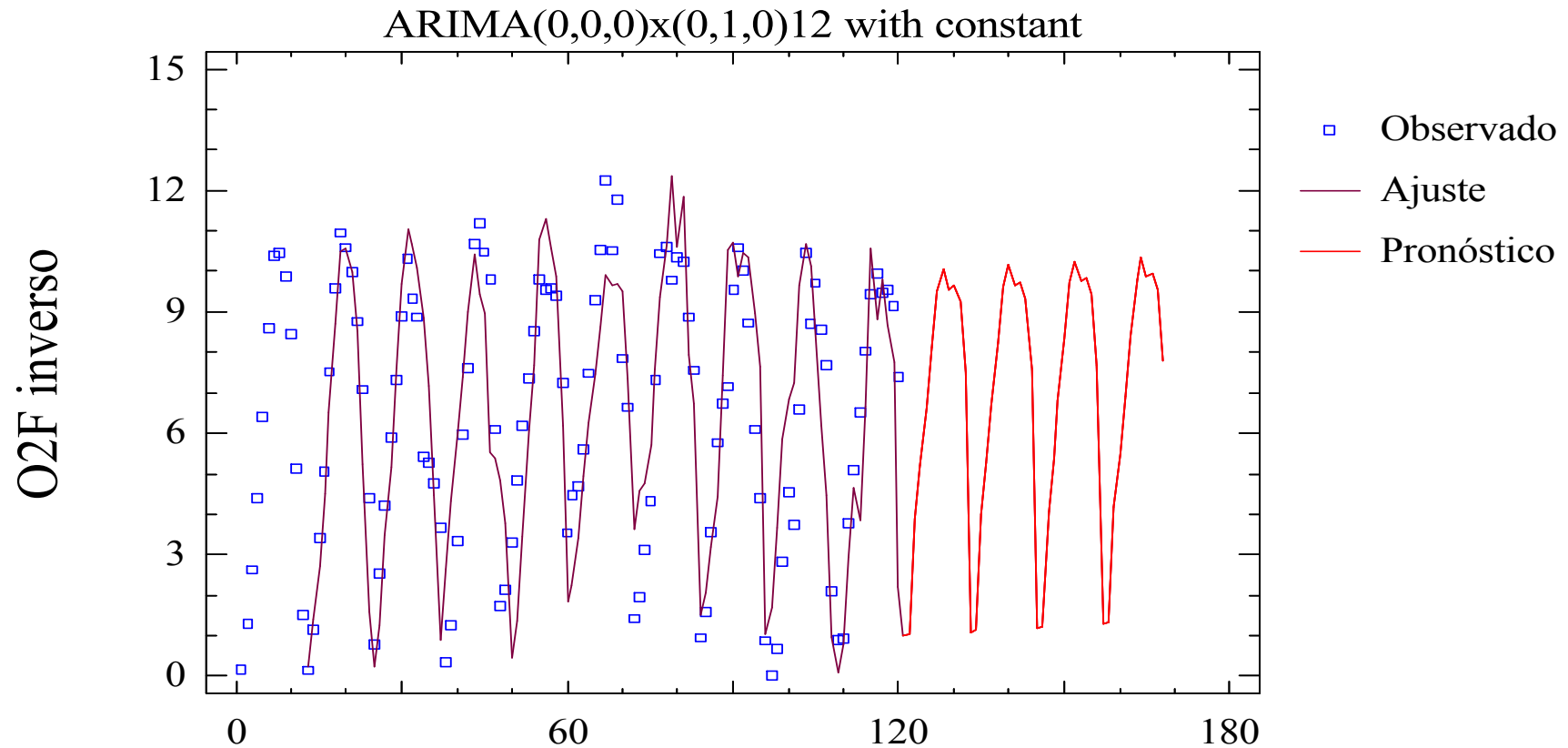
Period	Forecast	Lower 95.0% Limit	Upper 95.0% Limit
11/00	6.64211	4.35922	8.925
12/00	7.85614	4.76551	10.9468

# Interpolación de los datos faltantes



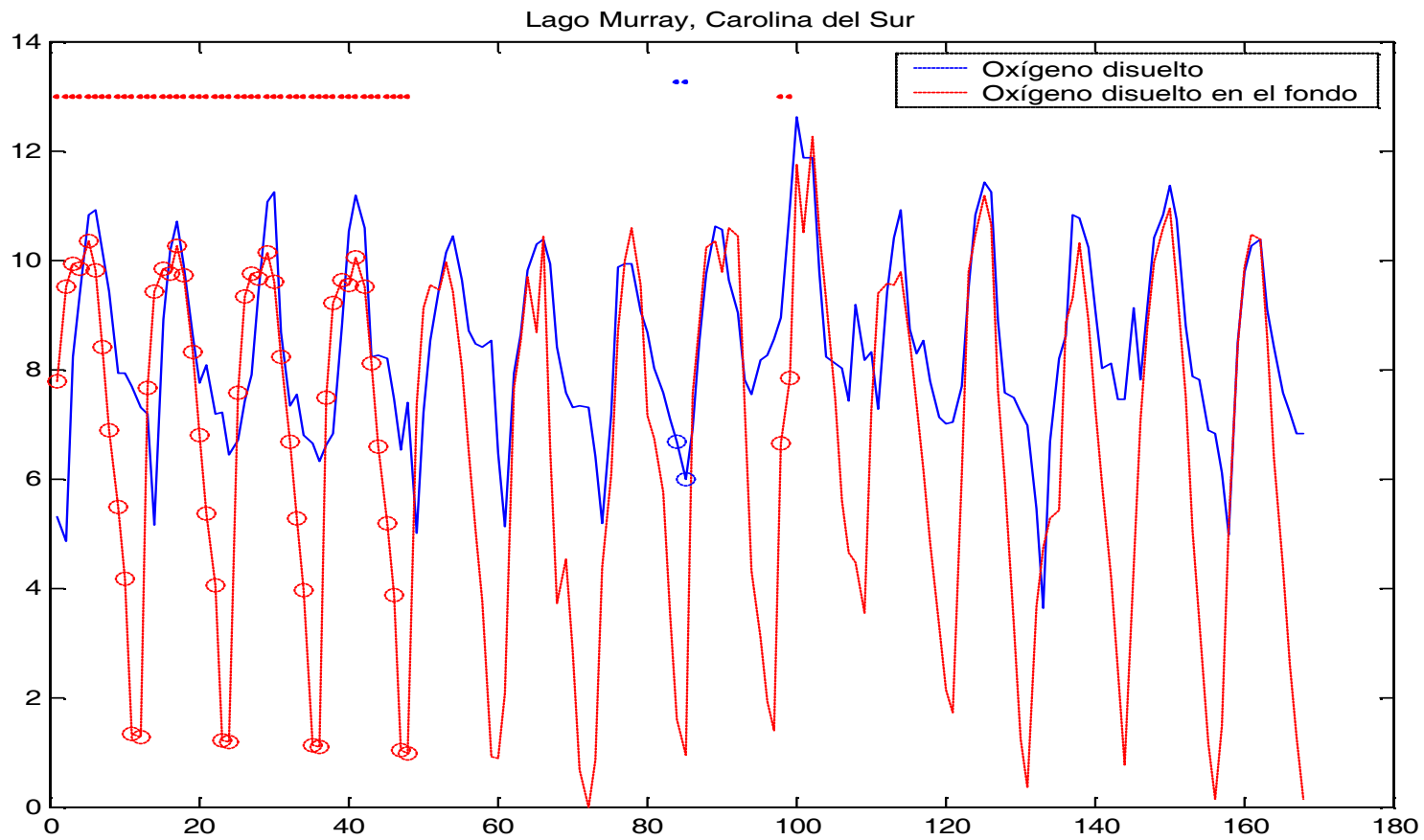
# Datos faltantes al inicio de la serie

Predicción inversa (*backcasting*)



# Datos faltantes al inicio de la serie

Predicción inversa (*backcasting*)



---

# Recapitulación

## Introducción al Análisis de Series Temporales

### Cálculo de Tendencias y Estacionalidad

- Gráficos temporales.
- Series estacionarias y no estacionarias.
- Descomposición de una serie: tendencia, estacionalidad y componente irregular.
- Predicción.
- Interpolación.

---

## Grupo de investigación en análisis de series temporales

- △ Andrés M. Alonso <andres.alonso@uc3m.es>
  - △ José R. Berrendero <joser.berrendero@uam.es>
  - △ Ana E. García <anaelizabeth.garcia@urjc.es>
  - △ Carolina García <garcia.martos@upm.es>
  - △ Adolfo Hernández <A.Hernandez@exeter.ac.uk>
  - △ Ana Justel <ana.justel@uam.es>
  - △ Julio Rodríguez <jr.puerta@uam.es>
  - △ María J. Sánchez <mjsan@etsii.upm.es>
-