EJERCICIOS RESUELTOS TEMA 3

Observación: En todos los ejercicios se ha puesto $\overline{A}$*, como notación de contrario de A.*

Ejercicio nº 1.-

En una urna hay 15 bolas numeradas de 2 al 16. Extraemos una bola al azar y observamos el número que tiene.

a) Describe los sucesos, escribiendo todos sus elementos.
   i. A = "Obtener par" B = "Obtener impar"
   ii. C = "Obtener primo" D = "Obtener impar menor que 9"
b) ¿Qué relación hay entre A y B? ¿Y entre C y D?
c) ¿Cuál es el suceso $A \cup B$? ¿y $C \cap D$?

Solución:

a) A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16}
   B = {3, 5, 7, 9, 11, 13, 15}
   C = {2, 3, 5, 7, 11, 13}
   D = {3, 5, 7}

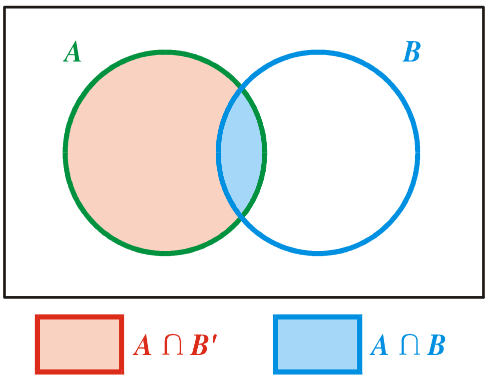
b) $B = \overline{A}$; $D \subset C$

c) $A \cup B = \Omega$ (Espacio muestral); $C \cap D = D$

Ejercicio nº 2.-

Sabiendo que: $P[A \cap B] = 0{,}2$; $P[\overline{B}] = 0{,}7$; $P[A \cap \overline{B}] = 0{,}5$
Calcula $P[A \cup B]$ y $P[A]$.

Solución:



$P[A] = P[A \cap \overline{B}] + P[A \cap B] = 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7$
$P[B] = 1 - P[\overline{B}] = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$
$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0{,}7 + 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}8$

Ejercicio nº 3.-

Sabiendo que: $P[A] = 0{,}5$; $P[\overline{B}] = 0{,}6$; $P[\overline{A} \cap \overline{B}] = 0{,}25$

a) ¿Son A y B sucesos independientes?
b) Calcula $P[A \cup B]$ y $P[A / B]$.

Solución:

a)
$P[\overline{B}] = 1 - P[B] = 0{,}6 \quad \rightarrow \quad P[B] = 0{,}4$
$P[\overline{A} \cap \overline{B}] = P[\overline{A \cup B}] = 1 - P[A \cup B] = 0{,}25 \quad \rightarrow P[A \cup B] = 0{,}75$
$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] \quad \rightarrow \quad 0{,}75 = 0{,}5 + 0{,}4 - P[A \cap B] \ \rightarrow \ P[A \cap B] = 0{,}15$
Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} P[A]\cdot P[B] = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2 \\ P[A \cap B] = 0{,}15 \end{array}\right\} P[A \cap B] \neq P[A]\cdot P[B]$$

Luego, A y B no son independientes.

b) Hemos obtenido en el apartado anterior que: $P[A \cup B] = 0{,}75$
Por otra parte:

$$P[A/B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{0{,}15}{0{,}4} = 0{,}375$$

Ejercicio nº 4.-

En unas oposiciones, el temario consta de 85 temas. Se eligen tres temas al azar de entre los 85. Si un opositor sabe 35 de los 85 temas, ¿cuál es la probabilidad de que sepa al menos uno de los tres temas?

Solución:

Tenemos que hallar la probabilidad de que ocurra el siguiente suceso:
A = "el opositor conoce, al menos, uno de los tres temas"
Para calcularla, utilizaremos el complementario. Si sabe 35 temas, hay 85 - 35 = 50 temas que no sabe; entonces:
$P\,[A] = 1 - P\,[\overline{A}\,] = 1 - P$ ["no sabe ninguno de los tres"] =

$$= 1 - \frac{50}{85} \cdot \frac{49}{84} \cdot \frac{48}{83} = 1 - 0{,}198 = 0{,}802$$

Por tanto, la probabilidad de que sepa al menos uno de los tres temas es de 0,802.

Ejercicio nº 5.-

En una cadena de televisión se hizo una encuesta a 2 500 personas para saber la audiencia de un debate y de una película que se emitieron en horas distintas: 2 100 vieron la película, 1 500 vieron el debate y 350 no vieron ninguno de los dos programas. Si elegimos al azar a uno de los encuestados:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que viera la película y el debate?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que viera la película, sabiendo que vio el debate?
c) Sabiendo que vio la película, ¿cuál es la probabilidad de que viera el debate?

Solución:

Organizamos la información en una tabla de doble entrada, completando los datos que faltan:

	DEBATE	NO DEBATE	
PELÍCULA	1 450	650	2 100
NO PELÍCULA	50	350	400
	1 500	1 000	2 500

Llamamos $D=$ "Vio el debate" y $P=$ "Vio la película".

a) $P[D\cap P]=\dfrac{1\,450}{2\,500}=\dfrac{29}{50}=0{,}58$

b) $P[P/D]=\dfrac{1\,450}{1\,500}=\dfrac{29}{30}=0{,}97$

c) $P[D/P]=\dfrac{1\,450}{2\,100}=\dfrac{29}{42}=0{,}69$

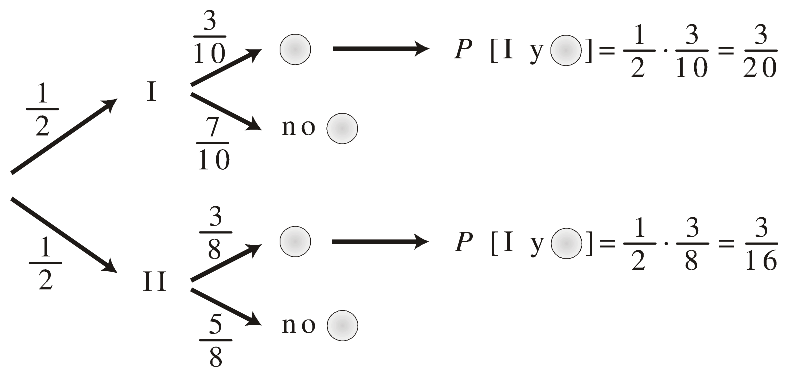
Ejercicio nº 6.-

Tenemos dos urnas: la primera tiene 3 bolas rojas, 3 blancas y 4 negras; la segunda tiene 4 bolas rojas, 3 blancas y 1 negra. Elegimos una urna al azar y extraemos una bola.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?
b) Sabiendo que la bola extraída fue blanca, ¿cuál es la probabilidad de que fuera de la primera urna?

Solución:

Hacemos un diagrama en árbol:



a) $P[B]=\dfrac{3}{20}+\dfrac{3}{16}=\dfrac{27}{80}$

b) $P[\mathrm{I}/B]=\dfrac{P[\mathrm{I}\ \text{ y }\ B]}{\mathrm{P}[B]}=\dfrac{3/20}{27/80}=\dfrac{4}{9}$

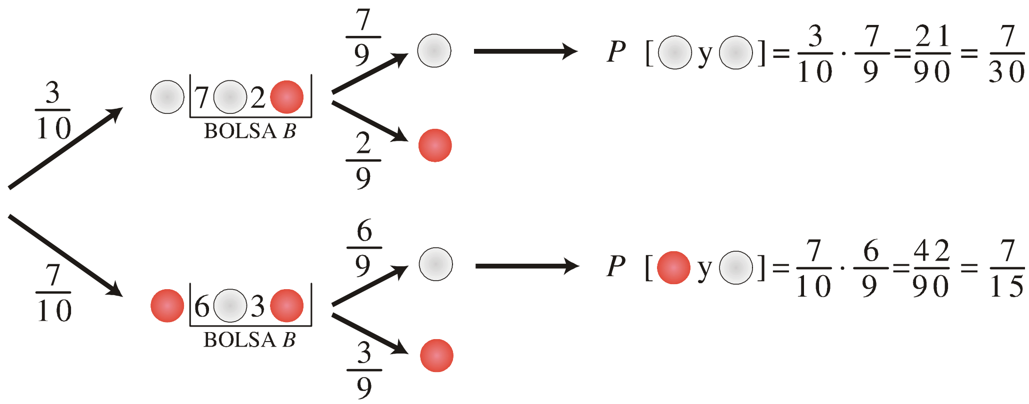
Ejercicio nº 7.-

Tenemos dos bolsas, A y B. En la bolsa A hay 3 bolas blancas y 7 rojas. En la bolsa B hay 6 bolas blancas y 2.rojas. Sacamos una bola de A y la pasamos a B. Después extraemos una bola de B.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de B sea blanca?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas sean blancas?

Solución:

Hacemos un diagrama en árbol:



a) $P[2^{a}\ Bl]=\frac{7}{30}+\frac{7}{15}=\frac{7}{10}$ b) $P[Bl\ \text{ y }\ Bl]=\frac{7}{30}$

Ejercicio nº 8.-

Para cada una de las siguientes situaciones, indica si sigue una distribución binomial. En caso afirmativo, identifica en ella los valores de n y p:

a) Lanzamos cien veces un dado y nos preguntamos por el número de unos que obtenemos.

b) Extraemos una carta de una baraja y vemos si es un as o no. Sin devolverla al mazo, extraemos otra y también miramos si se trata de un as o no, ... y así sucesivamente hasta diez veces.

Solución:

a) Es una distribución binomial con n=100, p=1/6 → B(100, 1/6)

b) No es una binomial, pues la probabilidad de obtener as para la segunda carta es distinta que para la primera (al ser sin reemplazamiento las extracciones).

Ejercicio nº 9.-

El 65% de los alumnos de un cierto instituto cursan estudios universitarios al terminar el Bachillerato. En un grupo de ocho alumnos elegidos al azar, halla la probabilidad de que estudien una carrera:

a) Alguno de ellos.

b) Más de seis.

Calcula la media y la desviación típica.

Solución:

Si llamamos x = "número de alumnos, de un grupo de 8, que estudian carrera", se trata de una distribución binomial con n = 8, p = 0,65 → B(8; 0,65)

a) $p[x>0]=1-p[x=0]=1-0,35^{8}=0,9998 \rightarrow p[x>0]=0,9998$

b) $p[x>6]=p[x=7]+p[x=8]=$

$$=\binom{8}{7}\cdot 0,65^{7}\cdot 0,35+\binom{8}{8}\cdot 0,65^{8}=8\cdot 0,65^{7}\cdot 0,35+0,65^{8}=0,169 \;\rightarrow\; p[x>6]=0,169$$

Hallamos la media y la desviación típica:

$\mu=np=8\cdot 0,65=5,2 \quad\rightarrow\quad \mu=5,2$

$\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{8\cdot 0{,}65\cdot 0{,}35}=1{,}35 \quad \rightarrow \quad \sigma=1{,}35$

Ejercicio nº 10.-

En un sorteo que se realiza diariamente de lunes a viernes, la probabilidad de ganar es 0,1. Vamos a jugar los cinco días de la semana y estamos interesados en saber cuál es la probabilidad de ganar 0, 1, 2, 3, 4 ó 5 días.

a) Haz una tabla con las probabilidades.
b) Calcula la media y la desviación típica.

Solución:

a)

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,59049	0,32805	0,0729	0,0081	0,00045	0,00001

Observar que se trata de una B(5; 0,1) → por ejemplo: $P(x_i=0)=\binom{5}{0}\cdot 0.1^0\cdot 0.9^5=0.9^5=0.59049$

b) $\mu=\Sigma\, p_i x_i=0{,}5 \quad \rightarrow \quad \mu=0{,}5$

$\sigma=\sqrt{\Sigma\, p_i x_i^2-\mu^2}=\sqrt{0{,}7-0{,}25}=\sqrt{0{,}45}=0{,}67 \quad \rightarrow \quad \sigma=0{,}67$

Ejercicio nº 11.-

Explica para cada una de estas situaciones si se trata de una distribución binomial. En caso afirmativo, identifica los valores de n y p:

a) El 2% de las naranjas que se empaquetan en un cierto lugar están estropeadas. Se empaquetan en bolsas de 10 naranjas cada una. Nos preguntamos por el número de naranjas estropeadas de una bolsa elegida al azar.
b) En una urna hay 2 bolas rojas, 3 blancas y 2 verdes. Sacamos una bola, anotamos su color y la devolvemos a la urna. Repetimos la experiencia 10 veces y estamos interesados en saber el número de bolas blancas que hemos extraído.

Solución:

a) Es una distribución binomial con $n=10,\; p=0{,}02 \rightarrow B(10;\; 0{,}02)$

b) Es una distribución binomial con $n=10,\; p=\frac{3}{7} \rightarrow B\left(10,\; \frac{3}{7}\right)$

Ejercicio nº 12.-

En cada una de estas situaciones, explica si se trata de una distribución binomial. En caso afirmativo, di cuáles son los valores de n y p:

a) El 3% de las chinchetas que se hacen en una determinada fábrica salen defectuosas. Se empaquetan en cajas de 20 chinchetas. Estamos interesados en el número de chinchetas defectuosas de una caja elegida al azar.
b) En una urna hay 2 bolas rojas, 3 blancas y 2 verdes. Extraemos una bola, anotamos su color y la devolvemos a la urna. Repetimos la experiencia 10 veces y estamos interesados en saber el número de bolas de cada color que hemos obtenido.

Solución:

a) Es una distribución binomial con $n=20,\; p=0{,}03 \rightarrow B(20;\; 0{,}03)$

b) No se trata de una binomial, ya que tenemos más de dos resultados posibles: rojo, blanco, verde.

Ejercicio nº 13.-

Una compañía telefónica recibe llamadas a razón de 5 por minuto. Si la distribución del número de llamadas es de Poisson, calcular la probabilidad de recibir menos de cuatro llamadas en un determinado minuto.

Solución.

Sea X el número de llamadas por minuto que se reciben. Tenemos que X sigue una distribución de Poisson, con $\lambda = 5$. La función de masa que viene dada por:

$$P(X=x)=\frac{\lambda^x \cdot e^{-x}}{x!}.$$

Nos piden la probabilidad:

$P(X<4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0{,}0067 + 0{,}0337 + 0{,}0842 + 0{,}1404 = 0{,}2650$

Ejercicio nº 14.-

El dueño de un criadero de árboles está especializado en la producción de abetos de Navidad. Estos crecen en filas de 300. Se sabe que por término medio 6 árboles no son aptos para su venta. Asume que la cantidad de árboles aptos para la venta por fila plantada sigue una distribución de Poisson.

a) Calcula la probabilidad de encontrar 2 árboles no vendibles en una fila de árboles.
b) Calcula la probabilidad de encontrar 2 árboles no vendibles en *media* fila de árboles.

Solución.

Sea X el número de árboles no vendibles en una fila, tenemos que

$X \sim \mathcal{P}(\lambda = 6)$. Sea Y el número de árboles no vendibles en media fila. El número medio de árboles no vendibles en media fila es 3. Si suponemos que siguen igual distribución, tenemos que $Y \sim \mathcal{P}(\lambda = 3)$.

a) $P(X = 2) = \dfrac{6^2 \cdot e^{-6}}{2!} = 0{,}0446$

b) $P(Y = 2) = \dfrac{3^2 \cdot e^{-3}}{2!} = 0{,}2240$

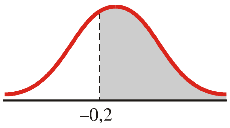
Ejercicio nº 15.-

Halla, en una distribución N(0, 1), las siguientes probabilidades:

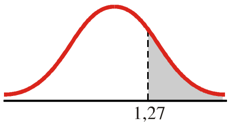
a) $p[z > -0,2]$
b) $p[z > 1,27]$
c) $p[-0,52 < z < 1,03]$

Solución:

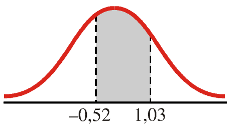
a) $p[z > -0,2] = p[z < 0,2] = 1 - P[z > 0.2] = 1 - 0.4207 = 0,5793$



b) $p[z > 1,27] = 0,1020$



c) $p[-0,52 < z < 1,03] = p[> -0.52] - p[z > 1.03] =$
$p[z < 0.52] - p[z > 1.03] = (1 - p[z > 0,52]) - p[z > 1.03] =$
$= 0,5470$



Ejercicio nº 16.-

El nivel de colesterol en una persona adulta sana sigue una distribución normal N(192, 12). Calcula la probabilidad de que una persona adulta sana tenga un nivel de colesterol:

a) Superior a 200 unidades.
b) Entre 180 y 220 unidades.

Solución:

a) $p[x > 200] = p\left[\frac{x-192}{12} > \frac{200-192}{12}\right] = p[z > 0,67] = 0.2514$

b) $p[180 < x < 220] = p\left[\frac{180-192}{12} < \frac{x-192}{12} < \frac{220-192}{12}\right] =$
$= p[-1 < z < 2,33] = p[z > -1] - p[z > 2.33] =$
$= p[z < 1] - p[z > 2.33] = (1 - p[z > 1]) - p[z > 2.33] = \ 0,8314$

Ejercicio nº 17.-

El 7% de los pantalones de una determinada marca salen con algún defecto. Se empaquetan en caja de 80 para distribuirlos por diferentes tiendas. ¿Cuál es la probabilidad de que en una caja haya más de 10 pantalones defectuosos?

Solución:

Si llamamos x = "número de pantalones defectuosos en una caja", entonces x es una binomial con $n = 80$; $p = 0{,}07$, en la que hay que calcular $p[x > 10]$.

La calculamos aproximando con una normal:

La media de x es $np = 80 \quad 0{,}07 = 5{,}6$; su desviación típica es $\sqrt{npq} = 2{,}28$.

x es $B(80;\ 0{,}07) \to x'$ es $N(5{,}6;\ 2{,}28) \to z$ es $N(0, 1)$

$$p[x > 10] = p[x' \geq 10{,}5] = p\left[z \geq \frac{10{,}5 - 5{,}6}{2{,}28}\right] = p[z \geq 2{,}15] =$$
$$= 0{,}0158$$

Ejercicio nº 18.-

Un examen de 100 preguntas admite como respuesta en cada una de ellas dos posibilidades, verdadero o falso. Si un alumno contesta al azar, calcula la probabilidad de que acierte más de 60 respuestas.

Solución:

Si llamamos $x =$ "número de respuestas acertadas", entonces x es una binomial con $n = 100$, $p = \frac{1}{2}$, en la que tenemos que calcular:

$p[x > 60]$ (La media de x es $np = 50$. Su desviación típica es $\sqrt{npq} = 5$).

La calculamos aproximando con una normal:

$$x \text{ es } B\left(100, \frac{1}{2}\right) \to x' \text{ es } N(50, 5) \to z \text{ es } N(0, 1)$$

$$p[x > 60] = p[x' \geq 60{,}5] = p\left[z \geq \frac{60{,}5 - 50}{5}\right] = p[z \geq 2{,}1] =$$
$$= 0{,}0179$$