LEC/LADE/LECD/LADED

SOLUCIONES REPASO
DISTRIBUCIONES MULTIVARIANTES

Problema 1.

a) $P\left(\textbf{calefacción}\right) = 0.37$

b) $P\left(\textbf{tabaco/hotel}\right) = \frac{0.15}{0.35} = 0.42857$

c) $P\left(\textbf{hotel/cocina}\right) = \frac{0.06}{0.25} = 0.24$

d) $P\left(\textbf{piso/electricidad}\right) = \frac{0.06}{0.15} = 0.4$

e) $P\left(\textbf{tabaco} \cap \textbf{hotel}\right) = 0.15$

Problema 2.

a) Si X e Y son independientes $\Rightarrow f_x(x)f_y(y) = f(x,y)$

Por ejemplo, $P(X=0, Y=0) = 0.3$
Ahora, $P(X=0) = 0.45\ y\ P(Y=0) = 0.4$
$P(X=0, Y=0) \neq P(X=0)P(Y=0)$
X e Y no son independientes

b)

$E(X) = P(X=0)*0 + P(X=1)*1 + P(X=2)*2 = 0.35*1 + 0.2*2 = 0.75$
$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 0.35*1 + 4*0.2 - (0.75)^2 = 0.5876$
$E(Y) = P(Y=1)*1 + P(Y=2)*2 + P(Y=3)*3 = 0.3*1 + 0.2*2 + 0.1*3 = 1$
$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 0.3*1 + 0.2*4 + 0.1*9 - 1 = 1$
$E(XY) = 0.15*1 + 0.05*2 + 0.1*2 + 0.02*3 + 0.07*4 + 0.06*6 = 1.15$
$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1.15 - (0.75)*1 = 0.4$
$\mathbf{E(X+Y) = 0.75 + 1 = 1.75}$
$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y) = 0.5876 + 1 + 2*0.4 = 2.3876$
$\mathbf{D.T.(X+Y) = 1.5452}$

c) $P(X=Y) = 0.3 + 0.15 + 0.07 = 0.52$

d)

P(X=0|Y=2)=$\frac{P(X=0,Y=2)}{P(Y=2)} = \frac{0.03}{0.2}$
P(X=1|Y=2)=$\frac{P(X=1,Y=2)}{P(Y=2)} = \frac{0.1}{0.2}$
P(X=2|Y=2)=$\frac{P(X=2,Y=2)}{P(Y=2)} = \frac{0.07}{0.2}$

e)

$\mathbf{E(X_1+X_2+X_3) = 2.25}$
$V(X_1+X_2+X_3) = 3*(0.5876) = 1.7628$
$\mathbf{D.T.}(X_1+X_2+X_3) = 1.3277$

Problema 3.

a) Para $0 \le x \le 1$, se tiene que:

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^1 (4xy)\,dy = 4x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 2x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$f(y) = \begin{cases} \int_0^1 (4xy)\,dx = 4y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2y & \text{si } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$f(y/x) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{4xy}{2x} = 2y & \text{si } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$E[Y/X=x] = \int_0^1 y f(y/x)\,dy = \int_0^1 y\,(2y)\,dy = 2\int_0^1 y^2 dy = 2\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

b) $f(x,y) = 4xy = (2x) \times (2y) = f(x) \times f(y),\ \forall x, y.$

Por tanto, **X** e **Y** son independientes.

c) $P(X \leq 0.3/Y = 0.8) = P(X \leq 0.3)$, por ser **X** e **Y** independientes.

$P(X \leq 0.3) = \int_0^{0.3} 2x dx = [x^2]_0^{0.3} = 0.09.$

Problema 4.

a) $P(Y = r/X = 2) = \frac{P(X=2,Y=r)}{P(X=2)}, r = 0, 1, 2, 3.$ El resultado es:

r	0	1	2	3
$\mathbf{P(Y = r/X = 2)}$	$\frac{10}{80} = 0.125$	$\frac{35}{80} = 0.4375$	$\frac{26}{80} = 0.325$	$\frac{9}{80} = 0.1125$

b) La variable $Z = XY$ toma los valores $z = 0, 1, 2, 3, 4$ y 6 con probabilidades respectivas $0.18, 0.07, 0.39, 0.01, 0.26$ y 0.09. Por tanto:

$Cov(X, Y) = E[XY] - E[X] E[Y] = 2.46 - 1.8 \times 1.32 = 0.0840.$

c) La covarianza es distinta de cero, luego no hay independencia.

Problema 5.

a) Es una distribución normal univariante con media y varianza,

1. (a) $\mu_{x/y} = \mu_x + \rho \times (\sigma_x/\sigma_y) \times (y - \mu_y)$
   $\sigma^2_{x/y} = \sigma^2_x . \times (1 - \rho^2)$
   En este caso,
   $\mu_{x/y=2} = 2, \qquad \sigma^2_{x/y=2} = 3.$
   Luego es una N(2,3).

b) La media es suma de medias por las propiedades de la normal.

2. (a) $\mu_U = 5, \qquad \mu_V = -1$.
   La matriz de covarianzas,
   V(2X+3Y) =V(2X)+V(3Y)+2Cov(2X,3Y)
   = 16+9+12×1 = 37
   V(2Y-3X) =28
   Cov(U,V)=Cov(2X+3Y,2Y-3X)=-23.
   Queda,
   $N\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 37 & -23 \\ -23 & 28 \end{pmatrix}$

c) U y V no son independientes, ya que Cov (U,V) $\neq 0$

Problema 6.

a) $0.02 + 0.10 + 0 + 0.08 + 0.11 + \mathbf{k} + 0.20 + 0.12 + 0.08 + 0.07 + 0.10 + 0.05 = 1.$

Luego $\mathbf{k} = 0.07$.

X	$\mathbf{P}_X$
0	0.2
1	0.5
2	0.3

Y	$\mathbf{P}_Y$
0	0.21
1	0.24
2	0.30
3	0.25

b) $P(X = 1/Y = 2) = \frac{P(X=1;Y=2)}{P(Y=2)} = \frac{0.2}{0.3} = 0.6666.$

c) $E[X] = 0 \times 0.2 + 1 \times 0.5 + 2 \times 0.3 = 0.5 + 0.6 = 1.1.$

$E[Y] = 0 \times 0.21 + 1 \times 0.24 + 2 \times 0.30 + 3 \times 0.25 = 1.59.$

d) X, Y independientes $\Leftrightarrow P_{ij} = P_{i.} \times P_{.j}, \forall i, j.$

$P_{00} = 0.02 \neq 0.2 \times 0.21 = 0.042 = P_{0.} \times P_{.0},$

Luego X e Y no son independientes.

e) $Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X, Y).$

Por tanto, no podemos concluir que $Var(X - Y) = 1.6519$, ya que X e Y no son independientes y deberíamos restarle $2Cov(X, Y)$. Podría ocurrir que $Cov(X, Y) = 0$, pero en general no podemos asegurarlo.

Problema 7.

a) La función de probabilidad conjunta viene dada por:

X/Y	**0**	**1**	**2**	$P(x)$
3	2/16	1/16	1/16	1/4
4	4/16	4/16	0	2/4
5	3/16	1/16	0	1/4
$P(y)$	9/16	6/16	1/16	1

y es evidente que $P(x,y) \neq P(x) \times P(y)$.

b) $E[X] = 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{2}{4} + 5 \times \frac{1}{4} = 4.$

$E[Y] = 0 \times \frac{9}{16} + 1 \times \frac{6}{16} + 2 \times \frac{1}{16} = 0.5.$

El beneficio esperado por los ecologistas será

$2 \times 50 + 10E[X] + 10E[Y] = 100 + 40 + 5 = 145$ euros.

Problema 8

X =número de clientes en espera en Caja General
Y =número de clientes en espera en Caja Rápida

a) $P(X=1, Y=1) = 0.15$

b) $P(X=Y) = P(X=0,Y=0) + P(X=1,Y=1) + P(X=2,Y=2) + P(X=3,Y=3) = 0.4$

c) $P(X-Y \geq 2) + P(Y-X \geq 2) = ... = 0.22$

d) $P(X+Y=4) = P(X=4,Y=0) + P(X=3,Y=1) + P(X=2,Y=2) + P(X=1,Y=3) = 0.17$

e) $P(X=0) = P(X=0,Y=0) + P(X=0,Y=1) + P(X=0,Y=2) + P(X=0,Y=3) = 0.19$

$P(X=1) = ... = 0.3$

$P(X=2) = ... = 0.25$

$P(X=3) = ... = 0.14$

$P(X=4) = ... = 0.12$

$E(x) = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3) + 4 \cdot P(X=4) = 1.7$

f) $P(X \geq 2 | Y=3) = \frac{P(X \geq 2, Y=3)}{P(Y=3)} = \frac{0.19}{0.23} = 0.8261$

g) inpependencia $\Longleftrightarrow P(X=k_1, Y=k_2) = P(X=k_1)P(Y=k_2), \forall k_1, k_2$

$P(X=0, Y=0) = 0.08$

$P(X=0) = ... = 0.19$

$P(Y=0) = P(X=0,Y=0) + P(X=1,Y=0) + P(X=2,Y=0) + P(X=3,Y=0)+$

$+P(X=4,Y=0) = 0.19$

$0.08 \neq (0.19)(0.19) \Rightarrow$ *No son independientes*