Ejercicios Tema 3: Probabilidad y variables aleatorias

1. En una urna hay 15 bolas numeradas de 2 al 16. Extraemos una bola al azar y observamos el número que tiene.
   a) Describe los sucesos, escribiendo todos sus elementos.
      i. A = "Obtener par" B = "Obtener impar"
      ii. C = "Obtener primo" D = "Obtener impar menor que 9"
   b) ¿Qué relación hay entre A y B? ¿Y entre C y D?
   c) ¿Cuál es el suceso A U B? ¿y C ∩ D?

2. Sabiendo que: $P[A \cap B] = 0{,}2$; $P[\overline{B}] = 0{,}7$; $P[A \cap \overline{B}] = 0{,}5$. Calcula P[A U B] y P[A].

3. Sabiendo que: P[A] = 0,5; $P[\overline{B}] = 0{,}6$; $P[\overline{A} \cap \overline{B}] = 0{,}25$.
   a) ¿Son A y B sucesos independientes?
   b) Calcula P[A U B] y P[A / B].

4. En unas oposiciones, el temario consta de 85 temas. Se eligen tres temas al azar de entre los 85. Si un opositor sabe 35 de los 85 temas, ¿cuál es la probabilidad de que sepa al menos uno de los tres temas?

5. En una cadena de televisión se hizo una encuesta a 2 500 personas para saber la audiencia de un debate y de una película que se emitieron en horas distintas: 2 100 vieron la película, 1 500 vieron el debate y 350 no vieron ninguno de los dos programas. Si elegimos al azar a uno de los encuestados:
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que viera la película y el debate?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que viera la película, sabiendo que vio el debate?
   c) Sabiendo que vio la película, ¿cuál es la probabilidad de que viera el debate?

6. Tenemos dos urnas: la primera tiene 3 bolas rojas, 3 blancas y 4 negras; la segunda tiene 4 bolas rojas, 3 blancas y 1 negra. Elegimos una urna al azar y extraemos una bola.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?
   b) Sabiendo que la bola extraída fue blanca, ¿cuál es la probabilidad de que fuera de la primera urna?

7. En una clase de 30 alumnos hay 18 que han aprobado matemáticas, 16 que han aprobado inglés y 6 que no han aprobado ninguna de las dos. Elegimos al azar un alumno de esa clase:
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado inglés y matemáticas?
   b) Sabiendo que ha aprobado matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado inglés?
   c) ¿Son independientes los sucesos "Aprobar matemáticas" y "Aprobar inglés"?

8. Extraemos dos cartas de una baraja española (de cuarenta cartas). Calcula la probabilidad de que sean:
   a) Las dos de oros.
   b) Una de copas u otra de oros.
   c) Al menos una de oros.
   d) La primera de copas y la segunda de oro.

9. Tenemos dos bolsas, A y B. En la bolsa A hay 3 bolas blancas y 7 rojas. En la bolsa B hay 6 bolas blancas y 2.rojas. Sacamos una bola de A y la pasamos a B. Después extraemos una bola de B.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de B sea blanca?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas sean blancas?

10. Tiramos dos dados y nos fijamos en la suma de los resultados. Calcular:
a) la probabilidad de que sea un 3
b) la probabilidad de que sea un número múltiplo de 3

11. En un aula el 80% de los ordenadores son portátiles y el resto de mesa. Si la probabilidad de que un día se estropee un portátil es de un 3%, y que se estropee un ordenador de mesa es de un 1%, calcular la probabilidad de que:
a) Un día se estropee un ordenador en ese aula.
b) Si se sabe que se ha estropeado un ordenador en ese aula un día determinado, ¿qué probabilidad existe de que sea un ordenador portátil?

12. Para cada una de las siguientes situaciones, indica si sigue una distribución binomial. En caso afirmativo, identifica en ella los valores de n y p:
a) Lanzamos cien veces un dado y nos preguntamos por el número de unos que obtenemos.
b) Extraemos una carta de una baraja y vemos si es un as o no. Sin devolverla al mazo, extraemos otra y también miramos si se trata de un as o no, ... y así sucesivamente hasta diez veces.

13. El 65% de los alumnos de un cierto instituto cursan estudios universitarios al terminar el Bachillerato. En un grupo de ocho alumnos elegidos al azar, halla la probabilidad de que estudien una carrera:
a) Alguno de ellos.
b) Más de seis.
c) Calcula la esperanza y la desviación típica del número de alumnos que cursan estudios universitarios al acabar el Bachillerato.

14. En un sorteo que se realiza diariamente de lunes a viernes, la probabilidad de ganar es 0,1. Vamos a jugar los cinco días de la semana y estamos interesados en saber cuál es la probabilidad de ganar 0, 1, 2, 3, 4 ó 5 días.
a) Haz una tabla con la función de probabilidad de la variable "número de veces que se gana por semana".
b) Calcula la esperanza y la desviación típica de esa variable aleatoria.

15. Sea Z una variable aleatoria continua con distribución N(0, 1). Halla las siguientes probabilidades y puntos:
a) $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{Z} > -\mathbf{0,2}]$
b) $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{Z} > \mathbf{1,27}]$
c) $\boldsymbol{P}[-\mathbf{0,52} < \boldsymbol{Z} < \mathbf{1,03}]$
d) $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{Z} > \mathbf{a}] = 0,6$
e) $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{Z} < b] = 0,2$

16. Sea la variable aleatoria X definida por la función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 0,5 & -1 \le x < 1 \\ 0,8 & 1 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente F(x). ¿Qué tipo de variable aleatoria es?

b) Determina la función de probabilidad de esta variable aleatoria.
c) Calcula la esperanza de X.
d) Calcula P(-2<X<1,2).

17. Dada la variable aleatoria continua X, con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} k(x+2) & 0 \le x \le 4 \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

Hallar:
a) El valor de k para que sea realmente una función de densidad.
b) La función de distribución.
c) La media.
d) La varianza.
e) $P(2 \le X \le 3)$

18. El flujo de demanda de teléfonos móviles (en miles a la hora) de una determinada fábrica, se ajusta a una variable aleatoria con la siguiente función de densidad:

$$f(x) \begin{cases} (k-x) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & resto \end{cases}$$

Se pide:
a) Hallar k, para que f(x) sea efectivamente una función de densidad.
b) Hallar la función de distribución F(x).
c) Hallar la esperanza y la varianza de x.
d) Si la fábrica sólo puede producir 750 como máximo en una hora, calcular la probabilidad de que haya un exceso de demanda.

19. La función de densidad de una variable aleatoria es

$$f(x) = \begin{Bmatrix} ax^2 + b & si\ x \in (0,2) \\ 0 & en\ otro\ caso \end{Bmatrix}$$

Sabiendo que $P(\frac{1}{2} < X < 1) = 0.1357$, determinar a y b.

20. El tiempo de reparación en horas de cierta pieza es una variable aleatoria X con función de distribución:

$$F(x) = \begin{Bmatrix} 0 & si\ x < 0 \\ \left(x/5\right)^2 & si\ 0 \le x < 5 \\ 1 & si\ x \ge 5 \end{Bmatrix}$$

Calcular la función de densidad de la variable aleatoria X para cualquier valor de x, el tiempo medio que lleva la reparación de una pieza y su desviación típica.

21. El tiempo empleado, en horas, en producir un determinado producto sigue una distribución N(10, 2). Calcula la probabilidad de que ese producto se tarde en hacer:

a) Menos de 7 horas.
b) Entre 8 y 13 horas.

22. El 7% de los pantalones de una determinada marca salen con algún defecto. Se empaquetan en caja de 80 para distribuirlos por diferentes tiendas. ¿Cuál es la probabilidad de que en una caja haya más de 10 pantalones defectuosos?

23. Un examen de 100 preguntas admite como respuesta en cada una de ellas dos posibilidades, verdadero o falso. Si un alumno contesta al azar, calcula la probabilidad de que acierte más de 60 respuestas.

24. Una compañía telefónica recibe llamadas a razón de 5 por minuto. Si la distribución del numero de llamadas es de Poisson, calcular la probabilidad de recibir menos de 4 llamadas en un determinado minuto.

25. El dueño de un vivero esta especializado en la producción de abetos de Navidad. Estos crecen en filas de 300. Se sabe que por termino medio 6 árboles no son aptos para su venta. Se asume que la cantidad de árboles aptos por fila plantada sigue una distribución de Poisson.
a) Calcula la probabilidad de encontrar 2 árboles no aptos en una fila de árboles
b) Calcula la probabilidad de encontrar 2 árboles no aptos en media fila de árboles.

26. Explica para cada una de estas situaciones si se trata de una distribución binomial. En caso afirmativo, identifica los valores de n y p:
- El 2% de las naranjas que se empaquetan en un cierto lugar están estropeadas. Se empaquetan en bolsas de 10 naranjas cada una. Nos preguntamos por el número de naranjas estropeadas de una bolsa elegida al azar.
- En una urna hay 2 bolas rojas, 3 blancas y 2 verdes. Sacamos una bola, anotamos su color y la devolvemos a la urna. Repetimos la experiencia 10 veces y estamos interesados en saber el número de bolas blancas que hemos extraído.
- En una urna hay 2 bolas rojas, 3 blancas y 2 verdes. Sacamos una bola, anotamos su color y la devolvemos a la urna. Repetimos la experiencia 10 veces y estamos interesados en saber el número de bolas de cada color que hemos extraído.
- El 3% de las chinchetas que se hacen en una determinada fábrica salen defectuosas. Se empaquetan en cajas de 20 chinchetas. Estamos interesados en el número de chinchetas defectuosas de una caja elegida al azar.

27. El nivel de colesterol en una persona adulta sana sigue una distribución normal N(192, 12). Calcula la probabilidad de que una persona adulta sana tenga un nivel de colesterol:
- Superior a 200 unidades.
- Entre 180 y 220 unidades.