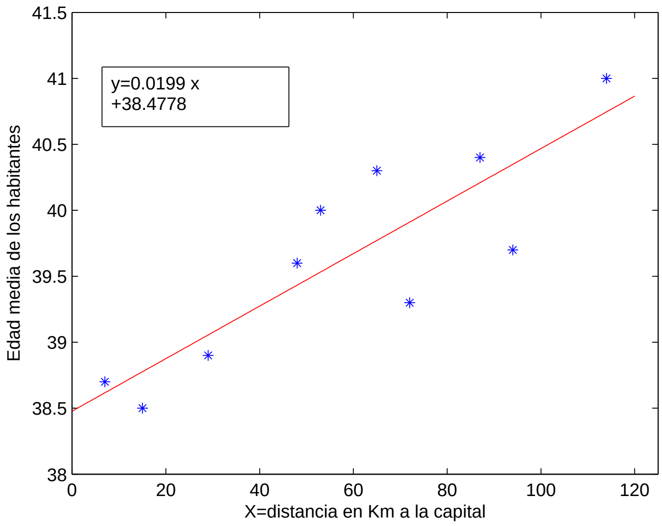
INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA
LADE, LEC, LADE-DER, LEC-DER, PER-DER
Solución al examen del 18 de Junio de 2009

Problema 1.

a) Diagrama de dispersión (y recta de regresión calculada en c)):



b) Coeficiente de correlación: $r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$.

$$
\begin{aligned}
s_{xy} &= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i \cdot y_i - \overline{x}\cdot\overline{y} = \frac{23367}{10} - \frac{584}{10}\cdot\frac{396.4}{10} = 21.7240 \\
s_x &= \sqrt{\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{45038}{10} - \left(\frac{584}{10}\right)^2} = 33.0642 \\
s_y &= \sqrt{\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i^2 - \overline{y}^2} = \sqrt{\frac{15719}{10} - \left(\frac{396.4}{10}\right)^2} = 0.7645 \\
r_{xy} &= \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{21.7240}{33.0642 \cdot 0.7645} = 0.8594
\end{aligned}
$$

Al ser el coeficiente de correlación lineal positivo y con un valor bastante próximo a 1, podemos decir que la asociación lineal entre las dos variables es creciente y fuerte.

c) Ecuación de la recta de regresión: $y = ax + b$ donde $a = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$ y $b = \overline{y} - a\overline{x}$.

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{21.7240}{33.0642^2} = 0.0199 \\
b &= \overline{y} - a\overline{x} = 39.64 - 0.0199 \cdot 58.4 = 38.4778
\end{aligned}
$$

La recta de regresión es: $y = 0.0199 \cdot x + 38.4778$.

d) La predicción a través de la recta de regresión de la edad media de una localidad situada a 35 km es:

$$y(35) = 0.0199 \cdot 35 + 38.4778 = 39.1743 \text{ años}$$

Problema 2.

a) El valor de la constante k se obtiene de la siguiente condición:

$$\sum_{x=1}^{5} \Pr\{X = x\} = \sum_{x=1}^{5} kx = k \times 15 = 1,$$

de donde obtenemos que $k = 1/15$.

b) La función de distribución de X es:

$$F_X(x) = \Pr\{X \leq x\} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1/15 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 3/15 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 6/15 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 10/15 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{si } x \geq 5. \end{cases}$$

c) La esperanza de X se obtiene de:

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{x=1}^{5} x \Pr\{X = x\} = \sum_{x=1}^{5} x^2 \frac{1}{15} \approx 3.67.$$

Para calcular la varianza, primero obtenemos $\mathrm{E}[X^2]$:

$$\mathrm{E}[X^2] = \sum_{x=1}^{5} x^2 \Pr\{X = x\} = \sum_{x=1}^{5} x^3 \frac{1}{15} = 15,$$

y la varianza es:

$$V(X) = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2 \approx 1.56.$$

Problema 3.

a) $\Pr\{X_A > 1\} = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} dx = -\mathrm{e}^{-x}|_1^{+\infty} \approx 0.3679$

b) Sea D la duración de una pieza, si aplicamos la regla de la probabilidad total se obtiene:

$$\begin{aligned} \Pr\{D > 1\} &= \Pr\{A\} \Pr\{X_A > 1\} + \Pr\{B\} \Pr\{X_B > 1\} \\ &= 0.6 \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} dx \ + \ 0.4 \int_1^{+\infty} 2\mathrm{e}^{-2x} dx = 0.2749. \end{aligned}$$

c) Aplicando la regla de Bayes, se obtiene:

$$\Pr\{A|D > 1\} = \frac{\Pr\{A\} \Pr\{X_A > 1\}}{\Pr\{D > 1\}} = \frac{0.6 \times 0.3679}{0.2749} = 0.80.$$

Problema 4. X = número de coches vendidos a la semana entre los 20 clientes que llegan al concesionario. $X \sim \mathcal{B}(20, 0.02)$.

a) $P(X = 0) = \binom{20}{0} 0.02^0 0.98^{20} = 0.6676$.

b) $P(X = 3) = \binom{20}{3} 0.02^3 0.98^{17} = 0.0065$.

c) $P(X > 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0.6677 - \binom{20}{1} 0.02^1 0.98^{19} = 0.0599$.

d) Por tratarse de una binomial: $E[X] = n \cdot p = 20 \cdot 0.02 = 0.4$ coches por semana $\Rightarrow$ $0.4 \times 4 = 1.6$ coches al mes; por lo que la facturación media será $1.6 \times 18.000 = 28800$ euros.