LEC/LADE/LECD/LADED
CURSO 2007/08
SOLUCIONES HOJA DE PROBLEMAS 2
ESTIMACIÓN PUNTUAL Y MÁXIMA VEROSIMILITUD

Problema 1.

(a) Dados $x_1, x_2, ..., x_n \sim f_\theta(x)$, la función de verosimilitud viene dada por

$$f_\theta(x_1, x_2, ..., x_n) \overset{independientes}{=} \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) \text{ si } x_i > 0, \forall i \text{ o } 0 \text{ en caso contrario.}$$

En este caso,

$$f_\theta(x_1, x_2, ..., x_n) = l(\theta) = \frac{\theta^n}{\left[\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\right]^{(1+\theta)}}$$

La función soporte es:

$$L(\theta) = n\log(\theta) - (1+\theta)\log(\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)) = n\log(\theta) - (1+\theta)\sum_{i=1}^{n}\log(1+x_i).$$

Derivando con respecto a θ la función soporte e igualando a $0:$

$$\hat{\theta}_{MV} = \frac{n}{\log(\prod_{i=1}^{n}(1+x_i))} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\log(1+x_i)}.$$

Comprobamos que, efectivamente se trata de un máximo: derivamos dos veces la función soporte y vemos que es negativa evaluada en el estimador.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} = \frac{-n}{\theta^2} < 0 \text{ para todo valor de } \theta.$$

En particular, para $\hat{\theta}_{MV}$ también se cumple, luego efectivamente $\hat{\theta}_{MV}$ es el estimador máximo verosímil.

(b) La varianza asintótica en este caso es

$$Var(\hat{\theta}_{MV}) = \left[-\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2}\Big|_{\hat{\theta}_{MV}}\right]^{-1} = \frac{\hat{\theta}_{MV}^2}{n}.$$

Problema 2.

(a) El error cuadrático medio de un estimador se define como $ECM(\hat{\mu}) = Var(\hat{\mu}) + sesgo^2(\hat{\mu})$ donde $sesgo(\hat{\mu}) = E(\hat{\mu}) - \mu$. Entonces, para cada estimador se tiene que

$$ECM(\hat{\mu}_1) = 30 + \frac{1}{9}\mu_1^2$$
$$ECM(\hat{\mu}_2) = 81$$

Como $\mu_1 \in [0,10], ECM(\hat{\mu}_1) < ECM(\hat{\mu}_2)$.

(b) Función de verosimilitud $= l(x_1,...,x_n;\mu) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\mu) = \sigma^{-5}(2\pi)^{-5/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\mu)^2\right\}$

$$\text{Función soporte} = L(x_1,...,x_n;\mu) = \log l(x_1,...,x_n;\mu) =$$
$$\log(\sigma^{-5}(2\pi)^{-5/2}) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\mu)^2$$
$$\frac{\partial S}{\partial\mu} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\mu)^2 = 0 \Leftrightarrow \hat{\mu}_{MV} = \frac{\sum_{i=1}^{5}x_i}{5} = \bar{x}.$$

Efectivamente es máximo:
$\frac{\partial^2 S}{\partial\mu^2} = \frac{-5}{\sigma^2} < 0$, para cualquier valor de μ.

(c) Como $E(\bar{X}) = \mu$, el sesgo del estimador máximo verosímil es 0 y por tanto el error cuadrático medio es igual a la varianza de $\bar{X}$, en este caso $\frac{\sigma^2}{n} = \frac{9.}{5}$

Problema 3.

(a) $l(x_1,...,x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n}\theta\left(\frac{1}{x_i}\right)^{\theta-1} = \theta^n \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)^{\theta-1}$

$$L((x_1,...,x_n;\theta) = \ln\ell(x_1,...,x_n;\theta) = \ln\theta^n + \ln\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)^{\theta-1} = n\ln\theta + (\theta-1)\ \ln\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right) =$$
$$n\ln\theta + (\theta-1)\ \ln\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-1} = n\ln\theta - (\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta}L(\widehat{\theta}) = \frac{n}{\widehat{\theta}} - \sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0\ ;\ \Rightarrow\ \widehat{\theta_{MV}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln\ x_i}$$

Es máximo: $\frac{\partial^2}{(\partial\theta)^2}L(\widehat{\theta}) = -\frac{n}{\widehat{\theta}^2} < 0\ ;\ \Rightarrow$ MAX.

La varianza asintótica es, $Var\left[\widehat{\theta}\right] = \left[-\frac{\partial^2}{(\partial\theta)^2}L(\theta)\right]^{-1}|\theta = \widehat{\theta}_{MV} = \frac{\widehat{\theta}^2_{MV}}{n}$

(b) Con los datos se obtiene que, $\widehat{\theta}_{MV} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln\ x_i} = (0,4)^{-1} = 2,5$

y con la desviación típica estimada $\sqrt{\frac{\widehat{\theta}^2_{MV}}{n}} = \sqrt{\frac{(2,5)^2}{100}} = 0,25$ por lo que, utilizando que para n grande se tiene, $\widehat{\theta}_{MV} \approx N\left(\theta,\ \sqrt{\frac{\widehat{\theta}^2_{MV}}{n}}\right)$ el intervalo de confianza sería:

IC $= \left[\widehat{\theta}_{MV} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{Var\left[\widehat{\theta}\right]}\right]$ que con $\alpha = 0,05$ resulta,

$$\text{IC} = \left[\widehat{\theta}_{MV} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\widehat{\theta}^2_{MV}}{n}} \right] = \left[2,5 \pm Z_{0,025} \sqrt{\frac{(2,5)^2}{100}} \right]$$

$$\text{IC} = \left[2,5 \pm (1,96) \sqrt{\frac{(2,5)^2}{100}} \right] = [2,5 \pm (0,49)]$$

$\Rightarrow IC = [2,01 \ ; \ 2,99]$

Problema 4

a) $E\left[3X_1 + 4X_2 - 6X_3\right] = E[3X_1] + E[4X_2] - 6E[3X_3] = -14$

b) Como las variables son independientes,

$V\left[3X_1 + 4X_2 - 6X_3\right] = 9V[X_1] + 16V[X_2] + 36V[X_3] = 420$

c) Siendo:

$$\left. \begin{array}{r} \widehat{\theta}_1 = 3X_1 - X_3 \\ \widehat{\theta}_2 = 2X_3 - 3X_1 \end{array} \right\}$$

$E(\widehat{\theta}_1) = E(3X_1 - X_3) = 3E(X_1) - E(X_3) = 2$

$E(\widehat{\theta}_2) = E(2X_3 - 3X_1) = 2E(X_3) - 3E(X_1) = 2$

Como tienen la misma esperanza,

$E.R.(\widehat{\theta}_1/\widehat{\theta}_2) = \frac{1/V(\widehat{\theta}_1)}{1/V(\widehat{\theta}_2)} = \frac{V(\widehat{\theta}_2)}{V(\widehat{\theta}_1)}$

$V(\widehat{\theta}_1) = V(3X_1 - X_3) = 9V(X_1) + V(X_3) = 44$

$V(\widehat{\theta}_2) = V(2X_3 - 3X_1) = 4V(X_3) + 9V(X_1) = 68$

Por lo tanto,

$E.R.(\widehat{\theta}_1/\widehat{\theta}_2) = \frac{68}{44} = 1.54 \Longrightarrow \widehat{\theta}_1$ es más eficiente que $\widehat{\theta}_2$.

Problema 5.

a) (1.5 puntos) En primer lugar se calcula la función de verosimilitud,

$$f_\theta(x_1, x_2, ..., x_n) \overset{independientes}{=} \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) \text{ si } x_i > k, \forall i \text{ o } 0 \text{ en caso contrario.}$$

En este caso,

$$f_\theta(x_1, x_2, ..., x_n) = l(\theta) = \frac{\theta^n k^{\theta n}}{\left[\prod_{i=1}^{n} x_i \right]^{(1+\theta)}}$$

La función soporte es:

$$L(\theta) = n\log(\theta) + n\theta\log(k) - (1+\theta)\sum_{i=1}^{n}\log(x_i)$$

Derivando con respecto a θ la función soporte e igualando a 0 :

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{\theta} + n\log k - \sum_{i=1}^{n}\log x_i = 0 \Leftrightarrow \hat{\theta}_{MV} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\log x_i - n\log k}.$$

Comprobamos que, efectivamente se trata de un máximo. Para ello derivamos dos veces la función soporte y vemos que es negativa evaluada en el estimador.

$$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta^2} = \frac{-n}{\theta^2} < 0 \text{ para todo valor de } \theta.$$

En particular, para $\hat{\theta}_{MV}$ también se cumple, luego efectivamente $\hat{\theta}_{MV}$ es el estimador máximo verosímil.

b) (0.5 puntos) La varianza asintótica en este caso es

$$Var(\hat{\theta}_{MV}) = \left[-\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta^2}\Big|_{\hat{\theta}_{MV}}\right]^{-1} = \frac{\hat{\theta}_{MV}^2}{n}.$$

c) (0.5 puntos) Como $x > k = e$, la muestra toma los valores $\{3,4,5,6,7,8,9,10\}$ y por tanto, $n = 8$. Además, $\sum_{i=1}^{n}\log x_i = 14.41$, con lo que,

$$\hat{\theta}_{MV} = \frac{8}{14.41 - 8} = 1.247$$

Problema 6

a) $f(x_1,...,x_n) = f(x_1)\cdot ...\cdot f(x_n) = \lambda^n e^{-\lambda\sum(x_i-20)}$

$\log\, f(x_1,...,x_n) = n\ln\lambda - \lambda\sum(x_i - 20)$

$\frac{\partial\log f(x_1,...,x_n)}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum(x_i - 20) = 0$

$\widehat{\lambda} = \frac{n}{\sum(x_i-20)}$

Para ver que es máximo,

$\frac{\partial^2\log f(x_1,...,x_n)}{d\lambda^2}|_{\widehat{\lambda}} = -\frac{n}{\widehat{\lambda}^2} < 0$

b) $\sum x_i = 2200$

i) $\widehat{\lambda} = \frac{100}{\sum(x_i-20)} = \frac{100}{2200-2000} = \frac{1}{2}$

ii) $V(\widehat{\lambda}) = \frac{-1}{\frac{\partial^2\log f(x_1,...,x_n)}{d\lambda^2}|_{\widehat{\lambda}}} = \frac{\widehat{\lambda}^2}{n} = \frac{1}{400}$

Problema 7

a) La función de densidad de cada elemento de la muestra es:

$$\mathrm{f}_\theta(x) = \frac{1}{i\theta}\exp(\frac{-x_i}{i\theta})$$

La función soporte viene determinada por:

$$\mathrm{l}(\theta, x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{i\theta}\exp(\frac{-x_i}{i\theta})$$

Operando en la expresión anterior obtenemos:

$$\frac{\partial Ln(l)}{\partial\theta} = -\frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i * i}{(i\theta)^2} = 0$$

Por lo tanto:

$$\widehat{\theta}_{est} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{ni}$$

Para demostrar que es estimador máximo verosímil debemos calcular la derivada segunda de $\ln(l)$,

$$\frac{\partial^2 Ln(l)}{\partial^2\theta}|_{\widehat{\theta}} = \frac{n}{\widehat{\theta}^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{2 * x_i * i}{\theta^3} = \frac{-n^3}{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{i}{}^2} < 0$$

Se trata de un máximo.

b) Sea $\delta = \sqrt{\theta}$ entonces $\theta = \delta^2$.

Como $\theta_{est} = \theta_{MV}$ entonces por las propiedades de los estimadores máximo verosímilies,

$$\delta_{MV} = \sqrt{\theta_{MV}} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n * i}\right)}$$

Problema 8.

a) $l\left(x_1, ..., x_n; \theta\right) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^y \left(\frac{\theta}{2}\right)^z (1-\theta)^w,$

donde **y** es el número de ceros en $x_1, ..., x_n$, **z** el número de unos y **w** el número de doses.

$L\left(x_1, ..., x_n; \theta\right) = \log l\left(x_1, ..., x_n; \theta\right) = y\log\theta - y\log 2 + z\log\theta - z\log 2 + w\log(1-\theta)$

$\frac{d}{d\theta} L\left(x_1, ..., x_n; \theta\right) = \frac{y}{\theta} + \frac{z}{\theta} - \frac{w}{(1-\theta)}$

Igualamos la derivada a cero:

$\frac{y}{\theta} + \frac{z}{\theta} - \frac{w}{(1-\theta)} = 0 \Leftrightarrow (1-\theta)\,y + (1-\theta)\,z - \theta w = 0 \Leftrightarrow y + z - \theta n = 0$, ya que $w = n - (y+z)$.

De modo que:

$\widehat{\theta}_n = \frac{Y+Z}{n}$

Comprobamos a continuación que se trata de un máximo:

$\frac{d}{d\theta} L\,(x_1, ..., x_n; \theta) > 0 \Leftrightarrow \frac{y}{\theta} + \frac{z}{\theta} - \frac{w}{(1-\theta)} > 0 \Leftrightarrow (1-\theta)\,y + (1-\theta)\,z - \theta w > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y + z - \theta n > 0 \Leftrightarrow \theta < \frac{y+z}{n} \Leftrightarrow \theta \in \left(0, \widehat{\theta}_n\right)$,

luego la función de verosimilitud es creciente en el intervalo $\left(0, \widehat{\theta}_n\right)$.

Análogamente:

$\frac{d}{d\theta} L\,(x_1, ..., x_n; \theta) < 0 \Leftrightarrow \theta > \frac{y+z}{n} \Leftrightarrow \theta \in \left(\widehat{\theta}_n, +\infty\right)$,

luego la función de verosimilitud es decreciente en el intervalo $\left(\widehat{\theta}_n, +\infty\right)$.

De todo esto se deduce que $\widehat{\theta}_n$ es un máximo.

b) En este caso, $Y = 3$, $Z = 4$, luego $\widehat{\theta}_8 = \frac{Y+Z}{n} = \frac{3+4}{8} = \frac{7}{8} = 0.875$.

Problema 9.

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (\alpha, \alpha+1) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

$\bar{X} = E(X) = \int_{\alpha}^{\alpha+1} x\ dx = \alpha + \dfrac{1}{2} \neq \alpha$

sesgo $= \dfrac{1}{2}$

b) $ECM(\bar{X}) = V(\bar{X}) + sesgo^2(\bar{X}) = \dfrac{1}{12n} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3n+1}{12n}$

c) $E(\hat{\alpha}) = \alpha \Longrightarrow \hat{\alpha} = \bar{X} - \dfrac{1}{2}$

Problema 10.

a) Verosimilitud

$l(\theta, x_1, ..., x_n) = \dfrac{1}{\theta^n} \exp(-\dfrac{1}{\theta}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \mu))$

Logaritmo de la verosimilitud

$\ln l(\theta, x_1, ..., x_n) = -n\ln(\theta) - \dfrac{1}{\theta}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \mu)$

Condición de primer orden:

Derivada de $\ln L$ con respecto de θ

$\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} = -\dfrac{n}{\theta} + \dfrac{1}{\theta^2}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \mu)$

Igualando a 0, se obtiene que $\hat{\theta}_{MV} = \bar{x} - \mu$.

Condición de segundo orden:

$\dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta^2} = \dfrac{n}{\theta^2} - \dfrac{2n}{\theta^3}(\bar{x} - \mu)$

Comprobamos que evaluada en el estimador máximo verosímil queda $-\dfrac{n}{\hat{\theta}^2} < 0$ por lo tanto, se trata efectivamente de un máximo.

b) Usando la expresión del estimador anterior, se obtiene que $\hat{\theta}_{MV} = 5,5$.

Problema 11.

(a) Tenemos que,

$$E(\tfrac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}) = E(\chi^2_{n-1}) = n - 1, \text{ por tanto}$$

$$E(\hat{\sigma}^2) = \tfrac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2 \text{ (sesgado)}$$

$$sesgo(\hat{\sigma}^2) = -\sigma^2 + \tfrac{n-1}{n}\sigma^2 = -\tfrac{\sigma^2}{n}$$

(b) En este caso,

$$E(\tfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}) = E(\chi^2_{n-1}) = n - 1$$

$$E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2 \text{ (insesgado)}$$

(c) El error cuadrático medio es:

$$ECM(\hat{\sigma}^2) = Var(\hat{\sigma}^2) + sesgo(\hat{\sigma}^2)^2$$

$$Var(\tfrac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}) = Var(\chi^2_{n-1}) = 2(n-1) \Rightarrow$$

$$Var(\hat{\sigma}^2) = \tfrac{2(n-1)\sigma^4}{n^2} \Rightarrow$$

$$ECM(\hat{\sigma}^2) = \tfrac{2(n-1)\sigma^4}{n^2} + \tfrac{\sigma^4}{n^2} = \tfrac{(2n-1)}{n^2}\sigma^4$$

(d) En este caso,

$$ECM(s^2) = Var(s^2)$$

$$Var(\tfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}) = Var(\chi^2_{n-1}) = 2(n-1)$$

$$Var(s^2) = \tfrac{2\sigma^4}{n-1}$$

(e) Se tiene que $ECM(s^2) > ECM(\hat{\sigma}^2)$:

$$\tfrac{2\sigma^4}{n-1} > \tfrac{(2n-1)}{n^2}\sigma^4 = (\tfrac{2}{n} - \tfrac{1}{n^2})\sigma^4$$

$$\tfrac{2}{n-1} > \tfrac{2}{n} > \tfrac{2}{n} - \tfrac{1}{n^2}$$

por lo tanto, $\hat{\sigma}^2$ es preferible a s^2.