

LEC/LADE/LECD/LADED
CURSO 2006/07
HOJA DE PROBLEMAS 1
DISTRIBUCIONES EN EL MUESTREO

1. Sea $(X_1, X_2, \dots, X_{n_1})$ una muestra aleatoria simple de la variable aleatoria X , que se distribuye como una $N(\mu_1, \sigma^2)$. Sea $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2})$ una muestra aleatoria simple de la variable aleatoria Y , que se distribuye como una $N(\mu_2, \sigma^2)$. X e Y son independientes.

Se quiere estimar σ^2 y para ello se consideran combinaciones lineales de las cuasi-varianzas muestrales S_1^2 y S_2^2 , es decir,

$$\hat{\sigma}^2 = \lambda S_1^2 + (1 - \lambda) S_2^2, \text{ donde } 0 \leq \lambda \leq 1$$

- a) Demostrar que este estimador es centrado para cualquier valor de λ
- b) Determinar qué valor de λ define el estimador $\hat{\sigma}^2$ más eficiente

(Indicación: $Var(\chi_n^2) = 2n$)

2. Un economista piensa que el incremento salarial de los empleados del sector bancario sigue una distribución normal con desviación típica 3.37. Se toma una muestra aleatoria de 16 empleados del sector.
 - a) Hallar la probabilidad de que la desviación típica muestral sea menor que 1.99.
 - b) Hallar la probabilidad de que la desviación típica muestral sea mayor que 2.89.
3. En ciertas unidades monetarias, el ahorro de un estudiante de Economía es una variable aleatoria normal de media $\mu = 3.5$ y desviación típica $\sigma = 0.5$. Se seleccionan $n = 16$ estudiantes al azar. Sea $\bar{X}$ la media muestral de los ahorros observados.
 - a) ¿Cuál es la distribución de $\bar{X}$? Razonar si se trata de una distribución exacta o aproximada.

- b) Calcular la probabilidad de que $\bar{X}$ exceda de 3.7.
 - c) Calcular la probabilidad de que $\bar{X}$ esté entre 3.34 y 3.36.
4. Se desea analizar la diferencia en el precio medio (en euros/m²) de la vivienda de nueva construcción en las ciudades de Madrid y Barcelona. Suponga que el precio de vivienda en Madrid (X) sigue una distribución normal con media μ_x y varianza σ_x^2 y que el precio de la vivienda en Barcelona (Y) sigue también una distribución normal, en este caso, con media μ_y y varianza σ_y^2 .

Para analizar la diferencia de medias ($\mu_x - \mu_y$) se dispone de dos muestras aleatorias independientes de tamaño n_x y n_y , respectivamente. Se pide:

- (a) Obtener razonadamente la media, la varianza y la distribución de $\bar{X} - \bar{Y}$.
 - (b) ¿Cuál es la probabilidad de que, dadas las correspondientes muestras, la diferencia de medias muestrales sea mayor que la diferencia $\mu_x - \mu_y$? Justifique los pasos que dé.
5. El tiempo que un trabajador necesita para completar cierta tarea tiene media de 50 minutos y desviación típica de 8 minutos. Un supervisor registra los tiempos empleados por 60 trabajadores para completar la tarea.
- a) Calcular la probabilidad de que el tiempo muestral medio sea mayor de 52 minutos.
 - b) El tiempo muestral medio obtenido es 53 minutos. ¿ Tiene el supervisor razones para pensar que el tiempo necesario para completar la tarea está aumentando ?
6. Supongamos que la desviación típica de la cantidad de dinero que un estudiante gasta en un semestre en libros es 3000 pesetas. Se toma una muestra aleatoria de 100 estudiantes para estimar el gasto medio de toda la población.
- a) ¿Cuál es la desviación típica de la media muestral?.

- b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral exceda de la media poblacional en más de 200 pesetas?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral resulte al menos 300 pesetas menor que la media poblacional?
- d) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral difiera de la media poblacional en más de 400 pesetas?

7.

- a) Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ una muestra aleatoria simple extraída de una población con media μ y varianza σ^2 .

Demostrar que $E[\bar{X}] = \mu$ y $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$.

- b) Examinados los incrementos salariales de los altos ejecutivos de un amplio grupo de empresas se observa que tienen una distribución normal de media 12,1% y desviación típica 3,5%. Se toma una muestra aleatoria de 16 observaciones de la población de incrementos salariales.
 - b.1) ¿Cuál es el error estándar (desviación típica) de la media muestral de incrementos salariales?
 - b.2) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea igual o inferior al 10%?
 - b.3) ¿Cuál es la probabilidad de que la desviación típica muestral sea superior a 4,52 %?

- 8. Una muestra aleatoria de 100 votantes de una gran ciudad contiene 62 partidarios de una reducción inmediata de los impuestos de propiedad. Una muestra aleatoria independiente de 200 votantes de la misma ciudad contiene 102 partidarios de ampliar el número de bibliotecas municipales. Sea p_1 la proporción poblacional de votantes partidarios de la reducción de los impuestos y sea p_2 la proporción poblacional de los partidarios de ampliar el número de bibliotecas.

Construir un estimador puntual insesgado para la diferencia $p_1 - p_2$ de las dos proporciones poblacionales.