Variables continuas

Si tenemos una variable continua X, podemos definir la función acumulada de distribución de la misma manera que para una variable discreta.

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Ahora esta función será una función suave y no una función escalón, pero tendrá las mismas propiedades que la función de distribución para una variable discreta.

$F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$, $F(x + \epsilon) \geq F(x)$ para cualquier $\epsilon > 0$.

Ejemplo 144 *¿Cuáles de las siguientes funciones pueden ser funciones de distribución para una variable continua X?*

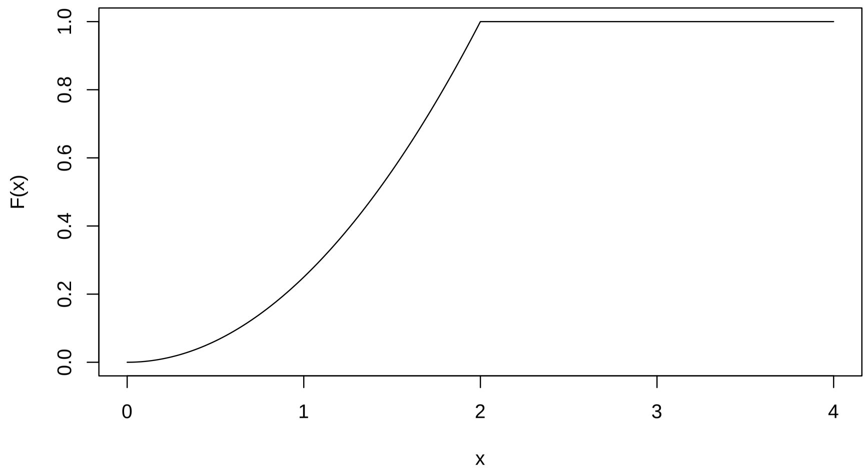
1. $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & \text{para } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{para } x > 2 \end{cases}$$

2. $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < -1 \\ \frac{x}{2} & \text{para } -1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{para } x > 2 \end{cases}$$

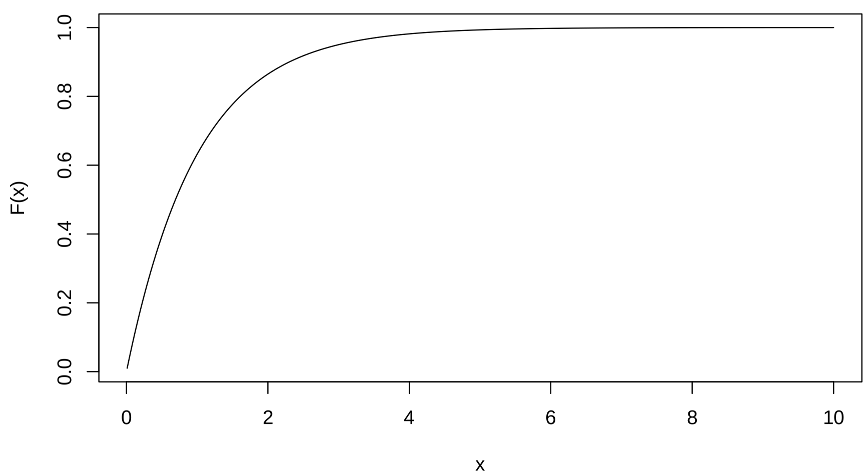
3. $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{para } 0 < x < \infty \end{cases}$$

Funciones 1 y 3 pueden ser funciones de distribución. La función 2 es negativa en el rango $-1 < x < 0$. Los siguientes dibujos muestran las funciones de distribución en casos 1 y 3.

1) $F(x) = \frac{x^2}{4}$.



3) $F(x) = 1 - e^{-x}$.



La función de densidad

Para una variable continua, la función de probabilidad ya no tiene sentido. No obstante, se define otra función con propiedades semejantes.

Definición 35 *Para una variable continua* X *con función de distribución* $F(x)$*, la* **función de densidad** *de* X *es*

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Las propiedades de la función de densidad son:

- $f(x) \geq 0$ para todo x.
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$.
- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du$.
- $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$.

Ejemplo 145 *Volvemos al Ejemplo 144 y calculamos las funciones de densidad en casos 1 y 3.*

1.

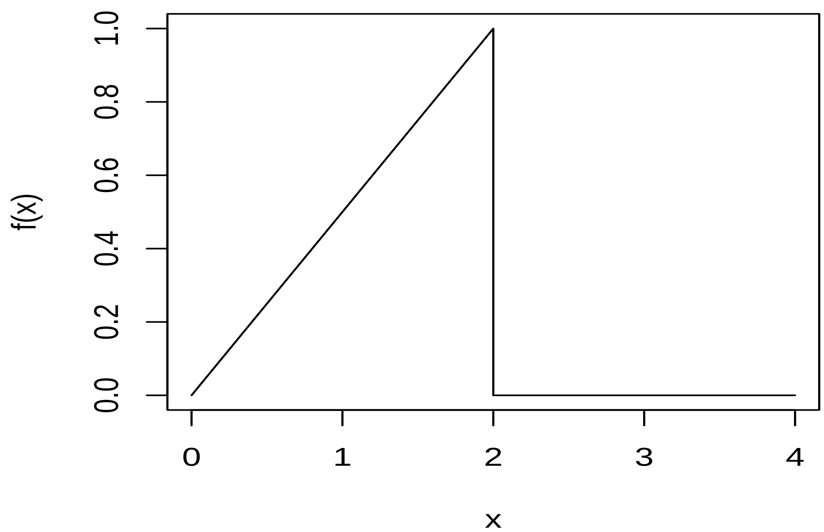
$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{4}\right) \\
&= \frac{2x}{4} = \frac{x}{2} \\
f(x) &= \begin{cases} \frac{x}{2} & \textit{para } 0 < x < 2 \\ 0 & \textit{si no} \end{cases}
\end{aligned}
$$

2.

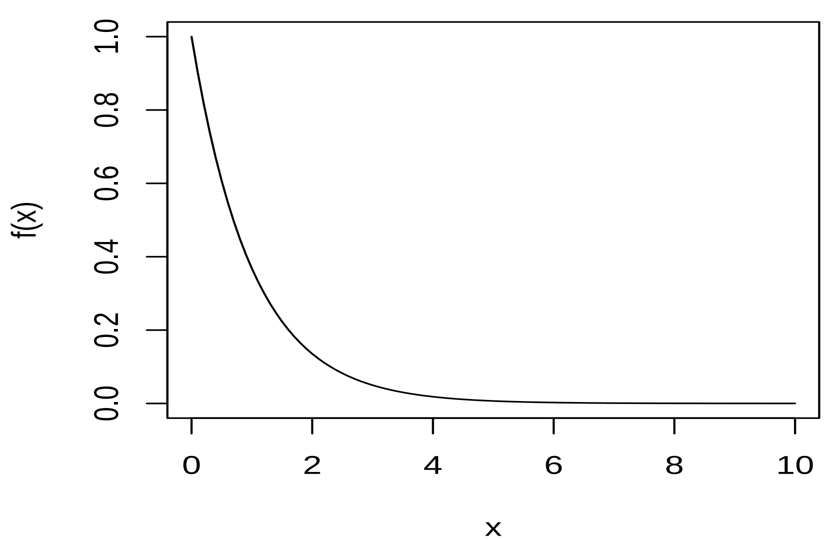
$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{d}{dx}\left(1 - e^{-x}\right) \\
&= e^{-x} \\
f(x) &= \begin{cases} e^{-x} & \textit{para } 0 < x < \infty \\ 0 & \textit{si no} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Los siguientes dibujos muestran las funciones de densidad.

1) $f(x) = \frac{x}{2}$.

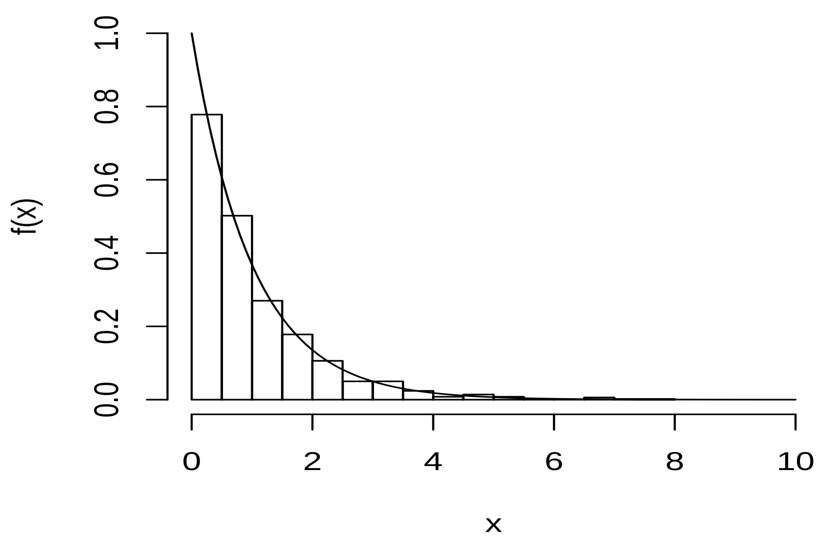


3) $f(x) = e^{-x}$.



Interpretación de la función de densidad

Pensamos en tomar una muestra muy grande y hacer un histograma de los datos (con bastantes barras) con la área normalizada a 1.



Se ve que el histograma es parecido a la función de densidad.

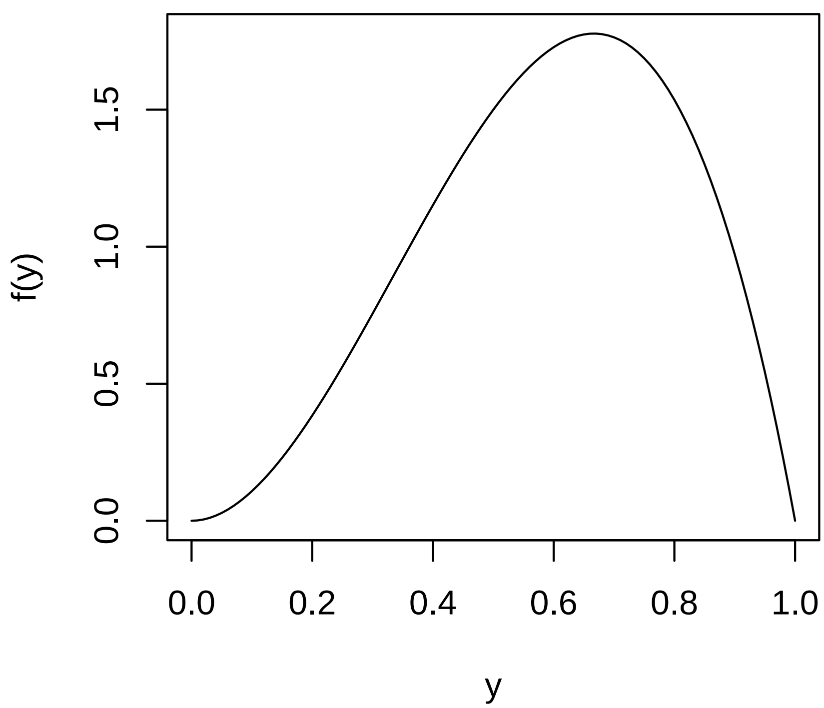
Ejemplo 146 *Una variable aleatoria Y tiene la función de densidad*

$$f(y) = \begin{cases} cy^2(1-y) & \text{si } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

¿Cuál es el valor de c?

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, dy \\ &= \int_0^1 cy^2(1-y)\, dy \\ &= c\int_0^1 \left(y^2 - y^3\right)\, dy \\ &= c\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 \\ &= c\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{c}{12} \Rightarrow \\ c &= 12 \end{aligned}$$

Se ve un diagrama de la función de densidad

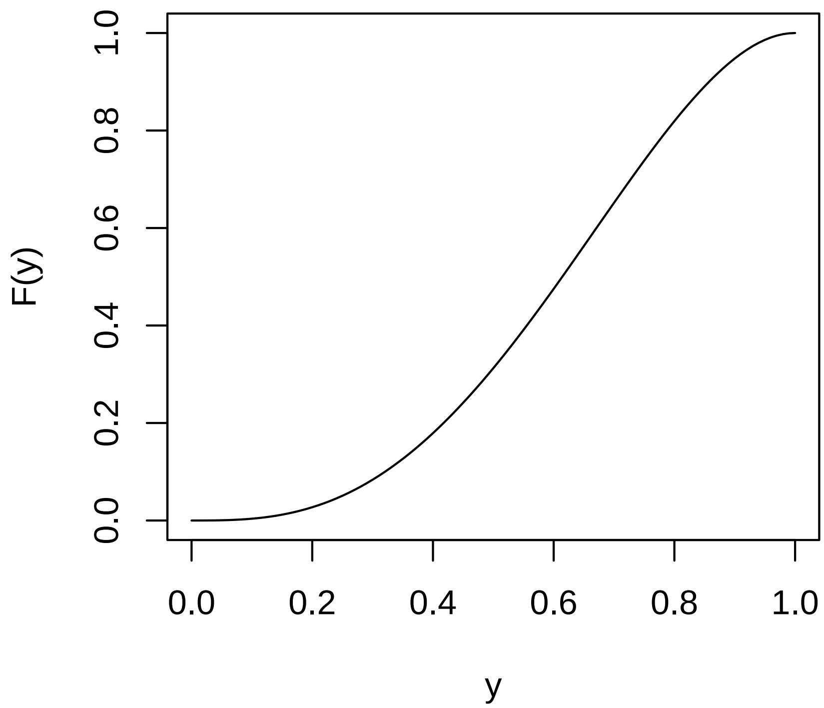


La densidad es asimétrica a la izquierda.

Hallamos la función de distribución.

Sea $0 < y < 1$. *Luego*

$$
\begin{aligned}
F(y) &= P(Y \leq y) \\
&= \int_{-\infty}^{y} f(y)\, dy \\
&= \int_{0}^{y} 12u^2(1-u)\, du \\
&= \left[12 \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} \right) \right]_0^y \\
&= 12 \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \\
F(y) &= \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ 12\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right) & \text{si } 0 < y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$



¿Cuál es $P(Y \leq 0{,}5)$*?*

$$P(Y \leq 0{,}5) = F(0{,}5) = 12\left(\frac{0{,}5^3}{3} - \frac{0{,}5^4}{4}\right) = {,}3125$$

Media, varianza y desviación típica de una variable continua

Recordamos las fórmulas para la media y varianza de una variable discreta:

$$\begin{aligned}
\mu &= \sum_i P(X = x_i) \times x_i \\
\sigma^2 &= \sum_i P(X = x_i) \times (x_i - \mu)^2
\end{aligned}$$

En el caso de una variable continua, la función de densidad juega el papel de la función de probabilidad y integramos en lugar de sumar.

Definición 36 *Si X es una variable continua con función de densidad $f(x)$ entonces, la media de X es*

$$E[X] = \int f(x) \times x \, dx$$

y la varianza de X es

$$V[X] = \int f(x) \times (x - E[X])^2 \, dx$$

La desviación típica es $DT[X] = \sqrt{V[X]}$.

Igual que con variables discretas, se usan los símbolos μ y σ para representar la media y desviación típica respectivamente.

Además, existe una forma más sencilla de expresar la varianza

$$\begin{aligned} V[X] &= E\left[X^2\right] - E[X]^2 \\ &= \int f(x) \times x^2\, dx - \mu^2 \end{aligned}$$

Las expresiones derivadas para variables discretas valen también para variables continuas, sustituyendo integración por sumación.

Ejemplo 147 *Volvemos al Ejemplo 144. Calculamos la media y varianza de la variables del apartado 1.*

1.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \begin{cases} \frac{x}{2} & \textit{para } 0 < x < 2 \\ 0 & \textit{si no} \end{cases} \\
E[X] &= \int x f(x)\, dx \\
&= \int_0^2 \frac{x}{2} \times x \, dx \\
&= \int_0^2 \frac{x^2}{2} \, dx \\
&= \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 \\
&= \frac{2^3}{6} = \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E\left[X^2\right] &= \int_0^2 \frac{x}{2} \times x^2 \, dx \\
&= \int_0^2 \frac{x^3}{2} \, dx \\
&= \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2 \\
&= \frac{2^4}{8} = 2 \\
V[X] &= E\left[X^2\right] - E[X]^2 \\
&= 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}
\end{aligned}
$$

La desviación típica es $DT[X] = \sqrt{\frac{7}{9}} \approx ,882.$

Ejemplo 148 *Calculamos la media, varianza y desviación típica para la variable del Ejemplo 146.*

$$
\begin{aligned}
\mu &= \int_0^1 12y^2(1-y) \times y \, dy \\
&= \int_0^1 12y^3(1-y) \, dy \\
&= 12 \int_0^1 \left(y^3 - y^4\right) \, dy \\
&= \left[12\left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5}\right)\right]_0^1 \\
&= 12\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = 0{,}6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E\left[Y^2\right] &= \int_0^1 12y^2(1-y) \times y^2 \, dy \\
&= \int_0^1 12y^4(1-y) \, dy \\
&= 12\int_0^1 \left(y^4 - y^5\right) \, dy \\
&= \left[12\left(\frac{y^5}{5} - \frac{y^6}{6}\right)\right]_0^1 \\
&= 12\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) = 0{,}4 \\
\sigma^2 &= E\left[Y^2\right] - \mu^2 \\
&= 0{,}4 - 0{,}6^2 = 0{,}04 \\
\sigma &= 0{,}2
\end{aligned}
$$

Otras medidas

- El coeficiente de variación de una variable con media μ y desviación típica σ es

$$\frac{|\mu|}{\sigma}.$$

- El coeficiente de asimetría es

$$\frac{E\left[(X-\mu)^3\right]}{\sigma^3}$$

- El coeficiente de kurtosis es

$$\frac{E\left[(X-\mu)^4\right]}{\sigma^4}$$

Mediana y Cuartíles

Definición 37 *Para una variable continua* X *con función acumulada de distribución* $F(x)$, *la* **mediana** *es el punto* M *donde* $F(M) = 0{,}5$.

Igualmente, si la densidad de X es $f(x)$, se tiene

$$\int_{-\infty}^{M} f(x)\, dx = 0{,}5.$$

Ejemplo 149 *Volvemos al caso 1 del Ejemplo 144. En este caso, la función de distribución es*

$$F(x) = \frac{x^2}{4}$$

y la mediana es el punto M *para que*

$$\begin{aligned} F(M) &= \frac{1}{2} \\ \frac{M^2}{4} &= \frac{1}{2} \\ M &= \sqrt{2} \approx 1{,}414. \end{aligned}$$

(Si X es una variable discreta, entonces, la mediana es el punto mínimo M donde $F(M) \geq$ 0,5.)

Se definen los cuartíles de manera semejante.

El primer cuartíl es el punto Q_1 donde $F(Q_1) = \frac{1}{4}$ y el tercer cuartíl es el punto Q_3 donde $F(Q_3) = \frac{3}{4}$.

Ejemplo 150 *En el Ejemplo anterior se tiene*

$$\begin{aligned}
\frac{Q_1^2}{4} &= \frac{1}{4} \\
Q_1 &= 1 \\
\frac{Q_3^2}{4} &= \frac{3}{4} \\
Q_3 &= \sqrt{3} \approx 1{,}73
\end{aligned}$$