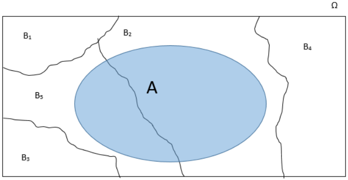
Variables estadísticas, distribuciones conjuntas, marginales y condicionales



Mike Wiper

Departamento de Estadística

Universidad Carlos III de Madrid

Grado en Estadística y Empresa

Objetivo

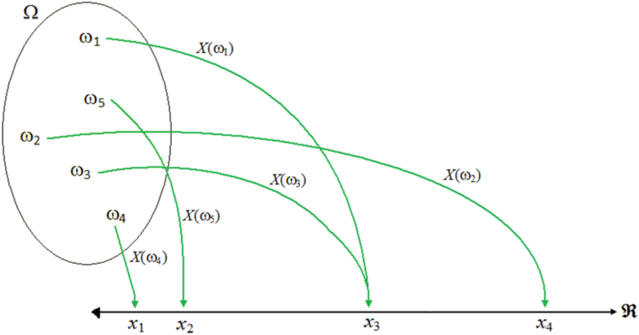
$$\int p(x)\,dx = 1$$

$$p(x) = \int p(x, y)\,dy$$

$$p(x) = \int p(x \mid y)\,p(y)\,dy$$

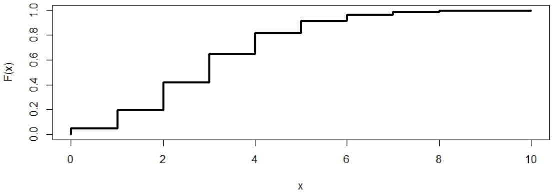
Refamiliarizarnos con las variables estadísticas y la ley de la probabilidad total y el teorema de Bayes para variables

Variables aleatorias



Una *variable aleatoria* es una función que ascribe un valor (numérico) al resultado de un experimento.

Variables discretas



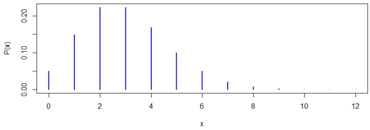
Para una variable discreta, X, tomando valores $x_1, x_2, \ldots$ se definen:

- La *función de probabilidad* o masa $P(X = x)$ tal que $\sum_i P(X = x_i) = 1$.
- La *función de distribución* $F_X(x)$ tal que:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i).$$

- Los *momentos*: $E[g(X)] = \sum_i g(x_i) P(X = x_i)$.

Ejemplo: la distribución de Poisson

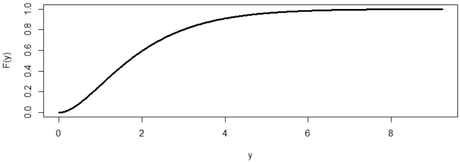


Una variable discreta, X, sigue una distribución de Poisson con parámetro $\lambda > 0$ si

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad \text{para } x = 0, 1, 2, \ldots$$

Se tiene $E[X] = V[X] = \lambda$.

Variables continuas



Para una variable continua, Y, tomando valores $x \in \mathbb{R}$, se tiene:

- La *función de distribución* $F_Y(y)$ tal que:

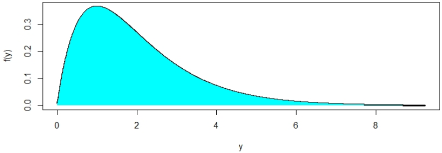
$$F_Y(y) = P(Y \leq y).$$

- La *función de densidad* $f_Y(y) = \frac{dF(y)}{dy}$ tal que

$$\int_{-\infty}^{y} f_Y(y)\, dy = F_Y(y).$$

- Momentos: $E[g(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f_Y(y)\, dy$.

Ejemplo: la distribución gamma



La variable continua, Y sigue una distribución gamma con parámetros $\alpha, \beta > 0$ si

$$f_Y(y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\beta y} \quad \text{para } y > 0$$

donde $\Gamma(\cdot)$ es la función gamma:

- $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du.$
- $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ y $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$ si α es un número entero.

$$E[Y] = \frac{\alpha}{\beta} \quad V[Y] = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Distribuciones conjuntas

Para dos (o más) variables discretas, la *distribución conjunta* es la función $P(X = x, Y = y)$ tal que

$$
\begin{aligned}
\sum_x \sum_y P(X = x, Y = y) &= 1, \\
\sum_x P(X = x, Y = y) &= P(Y = y), \quad \textit{la distribución marginal de } Y, \\
\sum_y P(X = x, Y = y) &= P(X = x), \quad \text{la distribución marginal de } X.
\end{aligned}
$$

En el caso de variables continuas, sustituimos sus respectivos sumatorios por integrales.

Ejemplo

Sea $Y > 0$ una variable continua y $X \in \{0, 1, 2, ..., \infty\}$ una variable discreta y definimos la distribución conjunta de X e Y:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{y^{\alpha+x-1} e^{-(\beta+1)y}}{x!}, \text{donde } \alpha, \beta > 0.$$

¿Cómo sabemos que es una distribución válida?

Ejemplo

Sea $Y > 0$ una variable continua y $X \in \{0, 1, 2, ..., \infty\}$ una variable discreta y definimos la distribución conjunta de X e Y:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{y^{\alpha+x-1} e^{-(\beta+1)y}}{x!}, \text{donde } \alpha, \beta > 0.$$

¿Cómo sabemos que es una distribución válida?

¿Es no negativa? $\checkmark$

Si sumamos sobre x e integramos sobre y, tiene que dar 1. ☹

Distribuciones condicionales

La *distribución condicional* de una variable (discreta) X dada otra variable (discreta) Y es:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)},$$

suponiendo que $P(Y = y) > 0$.

La *esperanza condicional* de una función $g(x, y)$ es

$$E[g(x, y)|Y = y] = \sum_x g(x, y)P(X = x|Y = y).$$

Ejemplo

Sea $Y \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ y $X|Y = y \sim \text{Poisson}(y)$. Luego, por la ley de la multiplicación:

$$
\begin{aligned}
f_{X,Y}(x,y) &= P(X = x|Y = y) f_Y(y) \\
&= \frac{y^x e^{-y}}{x!} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\beta y} \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{y^{\alpha+x-1} e^{-(\beta+1)y}}{x!},
\end{aligned}
$$

nuestra distribución conjunta anterior.

La media y varianza marginal

Supongamos que en nuestro ejemplo, queremos calcular $E[X]$ y $V[X]$.

☹ Suena complicado porqué en principio, tendríamos que evaluar la distribución marginal de X primero o computar a través de la distribución conjunta. Por ejemplo:

$$E[X] = \sum_x \int_{\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x,y)\, dy.$$

¿Existe una manera más fácil de hacer el cálculo?

La ley de las esperanzas iteradas

Para dos variables X e Y, la *ley de las esperanzas iteradas* dice que

$$E[X] = E[E[X|Y]].$$

▸ Demostración

Existe otra descomposición semejante para la varianza:

$$V[X] = E[V[X|Y]] + V[E[X|Y]].$$

▸ Demostración

Ejemplo

Sea $X|Y = y \sim$ Poisson(y) con $Y \sim$ Gamma(α, β). Calculamos la media y varianza de X.

Ejemplo

Sea $X|Y = y \sim \text{Poisson}(y)$ con $Y \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$. Calculamos la media y varianza de X.

$$
\begin{aligned}
E[X] &= E[E[X|Y]] \\
&= E[Y] \quad \text{¿Por qué?}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Sea $X|Y = y \sim \text{Poisson}(y)$ con $Y \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$. Calculamos la media y varianza de X.

$$\begin{aligned} E[X] &= E[E[X|Y]] \\ &= E[Y] \quad \text{¿Por qué?} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \end{aligned}$$

Ejemplo

Sea $X|Y = y \sim \text{Poisson}(y)$ con $Y \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$. Calculamos la media y varianza de X.

$$
\begin{aligned}
E[X] &= E[E[X|Y]] \\
&= E[Y] \quad \text{¿Por qué?} \\
&= \frac{\alpha}{\beta} \\
V[X] &= E[V[X|Y]] + V[E[X|Y]] \\
&= E[Y] + V[Y] \\
&= \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^2} \\
&= \frac{\alpha(1+\beta)}{\beta^2}
\end{aligned}
$$

La ley de la probabilidad total para variables

$$
\begin{aligned}
P(X = x) &= \sum_y P(X = x|Y = y)P(Y = y) \quad \text{si } Y \text{ es discreta,} \\
P(X = x) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(X = x|Y = y) f_Y(y)\, dx \quad \text{si } Y \text{ es continua.}
\end{aligned}
$$

El segundo caso es más interesante en la mayoría de aplicaciones.

Ejemplo

Sea $X|Y \sim \text{Poisson}(Y)$ con $Y \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$. Calculamos la distribución marginal de X.

$$
\begin{aligned}
P(X = x) &= \int P(X = x|Y = y) f_Y(y)\, dy \\
&= \int_0^\infty \frac{y^x e^{-y}}{x!} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\beta y}\, dy \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha) x!} \int_0^\infty y^{\alpha+x-1} e^{-(\beta+1)y}\, dy
\end{aligned}
$$

¿El integrando parece a una fórmula que hemos visto?

Ejemplo

$$P(X = x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)x!} \int_0^\infty y^{\alpha^*-1} e^{-\beta^* y}\, dy$$

donde $\alpha^* = \alpha + x$, $\beta^* = \beta + 1$.

Ejemplo

$$P(X = x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)x!} \int_0^\infty y^{\alpha^*-1} e^{-\beta^* y}\, dy$$

donde $\alpha^* = \alpha + x$, $\beta^* = \beta + 1$.

El integrando es otra distribución gamma sin su constante de integración.

Ejemplo

$$P(X = x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha) x!} \int_0^\infty y^{\alpha^* - 1} e^{-\beta^* y} \, dy$$

donde $\alpha^* = \alpha + x$, $\beta^* = \beta + 1$.

El integrando es otra distribución gamma sin su constante de integración.

$$\begin{aligned}
P(X = x) &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha) x!} \frac{\Gamma(\alpha^*)}{\beta^{*\alpha^*}} \int_0^\infty \frac{\beta^{*\alpha^*}}{\Gamma(\alpha^*)} x^{\alpha^* - 1} e^{-\beta^* x} \, dy \\
&= \frac{\Gamma(\alpha^*)}{\Gamma(\alpha) x!} \frac{\beta^\alpha}{\beta^{*\alpha^*}} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha + x)}{\Gamma(\alpha) x!} \left(1 - \frac{1}{\beta + 1}\right)^\alpha \frac{1}{\beta + 1}^{x} \quad \text{para } x = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

que es una *distribución binomial negativa*.

DBN

El teorema de Bayes para variables

$$
\begin{aligned}
P(Y = y|X = x) &= \frac{P(X = x|Y = y)P(Y = y)}{P(X = x)} \\
&= \frac{P(X = x|Y = y)P(Y = y)}{\sum_i P(X = x|Y = y_i)P(Y = y_i)} \\
f_{Y|X}(y|X = x) &= \frac{P(X = x|Y = y)f_Y(Y = y)}{P(X = x)} \\
&= \frac{P(X = x|Y = y)f_Y(Y = y)}{\int_{-\infty}^{\infty} P(X = x|Y = y)f_Y(y)\,dy}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

En nuestro ejemplo:

$$
\begin{aligned}
f_{Y|X}(y|x) &= \frac{P(X = x|Y = y) f_Y(Y = y)}{P(X = x)} \\
&= \frac{\frac{y^x e^{-y}}{x!} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\beta y}}{\frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\alpha)x!} \left(1 - \frac{\beta}{\beta+1}\right)^x \frac{\beta}{\beta+1}^\alpha} \\
&= \frac{(\beta+1)^{\alpha+x}}{\Gamma(\alpha+x)} y^{\alpha+x-1} e^{-(\beta+1)y}
\end{aligned}
$$

¿Qué distribución es?

Ejemplo

En nuestro ejemplo:

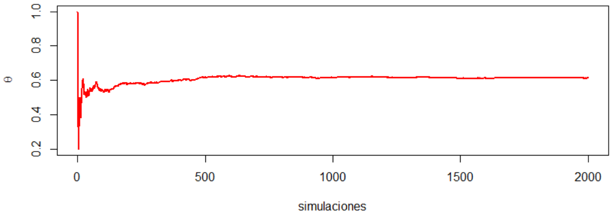
$$
\begin{aligned}
f_{Y|X}(y|x) &= \frac{P(X=x|Y=y)f_Y(Y=y)}{P(X=x)} \\
&= \frac{\frac{y^x e^{-y}}{x!}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}y^{\alpha-1}e^{-\beta y}}{\frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\alpha)x!}\left(1-\frac{\beta}{\beta+1}\right)^x \frac{\beta}{\beta+1}^\alpha} \\
&= \frac{(\beta+1)^{\alpha+x}}{\Gamma(\alpha+x)}y^{\alpha+x-1}e^{-(\beta+1)y}
\end{aligned}
$$

¿Qué distribución es?

$$Y|X=x \sim \text{Gamma}(\alpha+x, \beta+1).$$

Resumen y siguiente sesión

En esta sección hemos repasado algunos de los cálculos necesarios para evaluar distribuciones conjuntas, condicionales y marginales.



En la siguiente sesión vamos a recordar las características de la inferencia frecuentista.

Apéndice: demostración de la ley de esperanzas iteradas

Supongamos que X e Y son continuas. Entonces:

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int x f_X(x)\, dx \\
&= \int x \int f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx \\
&= \int \int x f_{X|Y}(x|y) f_Y(y)\, dy\, dx \\
&= \int \left\{ \int x f_{X|Y}(x|y)\, dx \right\} f_Y(y)\, dy \\
&= \int E[X|Y=y] f_Y(y)\, dy \\
&= E[E[X|Y]]
\end{aligned}$$

☺

Apéndice: demostración de descomposición de la varianza

Supongamos que X e Y son continuas. Entonces:

$$
\begin{aligned}
V[X] &= \int (x - E[X])^2 f_X(x)\, dx \\
&= \int \int (x - E[X])^2 f_{X|Y}(x|y) f_Y(y)\, dy\, dx \\
&= \int \left\{ \int (x - E[X|y] + E[X|y] - E[X])^2 f_{X|Y}(x|y)\, dx \right\} f_Y(y)\, dy \\
&= \int \left\{ \int (x - E[X|y])^2 f_{X|Y}(x|y)\, dx \right\} f(y)\, dy \\
&\quad +2 \int \left\{ \int (x - E[X|y])(E[X|y] - E[X]) f_{X|Y}(x|y)\, dx \right\} f_Y(y)\, dy \\
&\quad + \int \left\{ \int (E[X|y] - E[X])^2 f_{X|Y}(x|y)\, dx \right\} f_Y(y)\, dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V[X] &= \int V[X|y] f_Y(y)\,dy + \\
&\quad 2\int (E[X|y]-E[X])\left\{\int (x-E[X|y]) f_{X|Y}(x|y)\,dx\right\} f_Y(y)\,dy + \\
&\quad \int (E[X|y]-E[X])^2 f_Y(y)\,dy \\
&= E[V[X|Y]] + 0 + \int (E[X|y]-E[E[X|Y]])^2 f_Y(y)\,dy \\
&= E[V[X|Y]] + V[E[X|Y]]
\end{aligned}
$$

☺

Apéndice: la distribución binomial negativa

Una variable discreta, X, sigue una distribución binomial negativa con parámetros $r > 0$ y $0 < p < 1$ si:

$$P(X = x) = \frac{\Gamma(r + x)}{\Gamma(r)x!}(1 - p)^r p^x \quad \text{para } x = 0, 1, 2, \ldots$$

Cuando $r \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ se tiene:

$$P(X = x) = \left(\begin{array}{c} x + r - 1 \\ x \end{array} \right) (1 - p)^r p^x.$$

Se tiene $E[X] = r\frac{p}{1-p}$ y $V[X] = r\frac{p}{(1-p)^2}$.