Métodos Bayesianos

Ejercicios sobre inferencia para la distribución normal

Los ejercicios para entregar son marcados con un asterisco.

1. Supongamos que $Y|\mu \sim Normal(\mu, \sigma^2)$ donde la varianza, σ^2, es conocida. Suponiendo una distribución a priori: $\mu \sim Normal(m, v)$:

   a) Calcular la distribución predictiva de una nueva observación, Y

   b) Hallar la distribución a posteriori dada una muestra $y_1, ..., y_n$.

   c) Demostrar que cuando $v \to \infty$, la media a posteriori y un intervalo de 95 % de credibilidad para μ coinciden con sus equivalentes frecuentistas.

2. Los siguientes datos son los pesos (en gramos) de unas plantas secas.

4,17	5,58	5,18	6,11	4,50
4,61	5,17	4,53	5,33	5,14

   a) Suponiendo que los datos son normales de una población con varianza 1, hallar un intervalo de 95 % de credibilidad para el verdadero peso medio (μ) de estos tipos de plantas dada una distribución a priori uniforme.

   b) Repetir el análisis anterior pero ya suponiendo que la varianza es desconocida y suponiendo la típica distribución a priori "no informativa"para la media y la precisión $(\phi) : f(\mu, \phi) \propto \frac{1}{\phi}$.

3. En 1989, los sueldos extra (en miles de \$) ganados por unos banqueros en EEUU eran los siguientes:

$$1200, 1798, 1611, 1920, 860, 1681, 1312$$

Suponiendo que los datos provienen de una distribución normal con media μ y precisión ϕ y dada la distribución a priori conjugada

$$\mu|\phi \sim Normal(1500, 1/(2\phi)), \quad \phi \sim Gamma(1/2, 1/2):$$

a) Hallar la distribución a posteriori.
b) Calcular un intervalo de 95 % de credibilidad para μ.
c) Hallar la distribución predictiva del sueldo extra de otro banquero estadounidense.

4*. Se sabe que los resultados, Y, de una prueba se distribuyen como normales. Se supone una distribución a priori conjugada para la media μ y precisión, ϕ:

$$\mu|\phi \sim Normal(85, 1/(\phi)), \quad \phi \sim Gamma(4/2, 350/2).$$

La media y varianza de las pruebas de 100 personas son $\bar{y} = 89$ y $s_y^2 = 30$.

a) Calcular la distribución a posteriori de μ, ϕ.
b) Calcular y comparar intervalos de 95 % de credibilidad bayesiana y confianza frecuentista respectivamente.

5. Sea $\mu|\phi \sim Normal\left(m, \frac{1}{c\phi}\right)$ con $\phi \sim Gamma\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$. Hemos visto en clase que la distribución marginal de μ es una distribución t de Student escalada y no centrada (pero tuvimos que sufrir para hacer los cálculos).

a) Escribir un pequeño código `R` para generar una muestra Monte Carlo de valores de la densidad marginal de μ.
b) Ilustrar que cuando la muestra es grande, el histograma de los valores generados se aproxima a la verdadera densidad a posteriori.
c) Si $Y|\mu, \phi \sim Normal\left(\mu, \frac{1}{\phi}\right)$ extender el método para generar una muestra de valores de la distribución marginal de Y.