Métodos Bayesianos
Ejercicios sobre distribuciones conjugadas: soluciones

1. (a) $5/20 = 0.25$.

   (b) La distribución uniforme es una distribución beta con parámetros $\alpha = \beta = 1$ y luego, la distribución a posteriori es $\text{Beta}(1+5, 1+20-5) = \text{Beta}(6, 16)$.

   (c) La media es $6/(16+6) = 3/11 \approx 0.273$. La moda es igual al EMV y la mediana es aproximadamente 0.266 (usando `qbeta`).

2. (a) En este caso, mediante el teorema de Bayes, la distribución a posteriori es

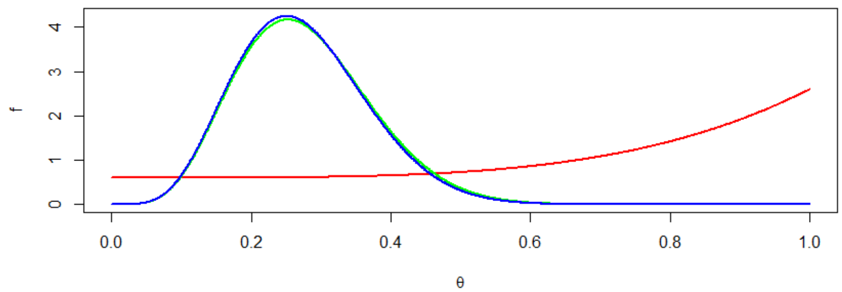
$$
\begin{aligned}
f(\theta|\text{datos}) &\propto \left(0.6 \times 1 + 0.4 \frac{1}{B(5,1)} \theta^{5-1}\right) \theta^5 (1-\theta)^{15} \\
&\propto 0.6\theta^{6-1}(1-\theta)^{16-1} + 0.4 \frac{1}{B(5,1)} \theta^{10-1}(1-\theta)^{16-1} \\
&\propto 0.6B(6,16) \frac{1}{B(6,16)} \theta^{6-1}(1-\theta)^{16-1} + \\
&\quad \frac{0.4B(10,16)}{B(5,1)} \frac{1}{B(10,16)} \theta^{10-1}(1-\theta)^{16-1} \\
&= w \frac{1}{B(6,16)} \theta^{6-1}(1-\theta)^{16-1} + (1-w) \frac{1}{B(10,16)} \theta^{10-1}(1-\theta)^{16-1}
\end{aligned}
$$

   donde $w = \frac{0.6B(6,16)}{0.6B(6,16) + \frac{0.4B(10,16)}{B(5,1)}}$.

   (b) La media es

$$
E[\theta|\text{datos}] = w \frac{6}{6+16} + (1-w) \frac{10}{10+16} \approx 0.968.
$$

   (c) Lo ms fácil es usar el cdigo R. El gráfico es el siguiente donde la distribución a priori es la curva roja, la verosimilitud escalada es en asúl y la a posteriori es la densidad en verde.



3. (a) $f(y|\theta) = \theta \exp(-\theta y)$ que es directamente en la forma de una familia exponencial con $h(y) = 1$, $g(\theta) = \theta$, $\eta(\theta) = -\theta$ y $T(y) = y$.

   (b) Una distribución a priori conjugada tiene forma $f(\theta) \propto g(\theta)^a \exp(b\eta(\theta))$ y en este caso, tenemos

$$f(\theta) \propto \theta^a e^{-b\theta}$$

   (c) Escribiendo $\alpha = a + 1$ y $\beta = b$, se ve que la distribución a priori es una distribución gamma con parámetros α, β.

   (d) Por el teorema de Bayes, dada una muestra, se tiene

$$\begin{aligned} f(\theta|\text{datos}) &\propto f(\theta) \prod_{i=1}^{n} f(y_i|\theta) \\ &\propto \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta} \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta y_i} \\ &\propto \theta^{\alpha+n-1} e^{-(\beta+n\bar{y})\theta} \end{aligned}$$

   que es otra distribución gamma con parámetros $\alpha + n$ y $\beta + n\bar{y}$.

4. (a) Supongamos que $Y|\theta \sim \text{Uniforme}(\theta)$. Luego, $f(x|\theta) = \frac{1}{\theta}$ para $0 < x < \theta$ que es una densidad de forma de una familia exponencial (irregular) con, por ejemplo, $g(\theta) = \frac{1}{\theta}$, $h(y) = 1$, $\eta(\theta) = T(y) = 0$. Entonces, una distribución a priori conjugada es

$$f(\theta) \propto \frac{1}{\theta^a} \quad \text{para } \theta > b > 0.$$

   Escribiendo $\alpha = a - 1$ y $\beta = b$, tenemos la distribucin Pareto,

$$f(\theta) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{\theta^{\alpha+1}} \quad \text{para } \alpha, \beta > 0.$$

(b) En este caso, la distribución a posteriori es $\theta|\text{datos} \sim \text{Pareto}(\alpha + n, \beta^*)$ donde $\beta^* = \max\{\beta, y_i : i = 1, ..., n\}$.

(c) Cuando $\alpha, \beta \to 0$, la distribución a poateriori es $\text{Pareto}(n, \hat{\theta})$ donde $\hat{\theta} = \max\{y_i : i = 1, ..., n\}$ es el EMV. La media a posteriori es $E[\theta|\text{datos}] = \frac{n\hat{\theta}}{n-1} > \hat{\theta}$.

La media a posteriori es siempre ms grande que el EMV en este caso.